Hak Cipta Buku Ajar

by Dewiyani Sunarto

BUKU AJAR

MATEMATIKA BISNIS

Pengarang :

M.J. Dewiyani Sunarto

Puspita Kartikasari

INSTITUT BISNIS DAN INFORMATIKA STIKOM SURABAYA

Heart & Mind Towards Excellence

BUKU AJAR
MATEMATIKA BISNIS

Pengarang :

- M.J. Dewiyani Sunarto
- Puspita Kartikasari

Diterbitkan Oleh :

CV. REVKA PRIMA MEDIA
Anggota IKAPI No. 205/JTI/2018
Ruko Manyar Garden Regency No.27
Jl. Nginden Semolo 101 Surabaya
Telp/Fax. 031 592 6204
E-mail : revkaprimamedia@gmail.com

18.12.007

Desember 2018

ISBN : 978-602-4171-51-3

Dicetak oleh CV. REVKA PRIMA MEDIA

KATA PENGANTAR

Perpaduan dua scientist cantik-cantik bidang pendidikan matematika dan statistik, telah menghadirkan buku dengan gaya tutur penjelasan terstruktur memukau, akan membantu kita terhindar dari tragedi kegagalan memahami matematika bisnis. Secara sistematis, jernih dan detil, buku ini akan membawa arah pembaca untuk mampu *terpahamkan* dan *terlatih* akan problematika matematika bisnis yang menakutkan

Dr. Anjik Sukmaaji, S. Kom., M.Eng.

Dosen Tetap Institut Bisnis dan Informatika Stikom Surabaya
Kepala Program Studi S1 Sistem Informasi Institut Bisnis dan Informatika Stikom Surabaya

Matematika sebagai ilmu dasar yang sangat diperlukan dalam kehidupan sehari-hari. Matematika mencakup perhitungan yang sangat sederhana (misalnya penjumlahan dan pengurangan) sampai pada perhitungan yang sangat rumit (misalnya persamaan dan pertidaksamaan). Pada konteks matematika dalam artian luas ini, hampir tidak ada seorangpun yang tidak memanfaatkan ilmu matematika dalam kehidupannya. Kehadiran buku Matematika Bisnis ini merupakan angin segar yang sangat membantu para mahasiswa dalam memahami dan mempraktekkan ilmu bisnis dengan dukungan perhitungan matematis dengan tepat. Kajian mendasar dengan contoh dan gambar yang membantu menguatkan pemahaman mahasiswa dalam buku ini diharapkan dapat meningkatkan hasil belajar para mahasiswa pada matakuliah Matematika Bisnis ini.

Saya berharap buku ini dapat menjadi salah satu sumber yang dapat memberikan motivasi dan pencerahan kepada mahasiswa untuk menjadi suka belajar matematika. Terlebih dengan hadirnya teknologi informasi dan banyaknya gadget yang memberi kemudahan kepada para mahasiswa untuk melakukan proses hitung, semoga dengan buku ini mereka tertantang dan suka melatih diri untuk terampil melakukan proses hitung.

Dr. Bambang Hariadi, M.Pd

Dosen Tetap Institut Bisnis dan Informatika Stikom Surabaya
Wakil Rektor Bidang Kemahasiswaan dan Alumni

PRAKATA

Matematika diyakini sebagai ilmu yang mampu berperan sebagai pembantu, namun sekaligus sebagai ratu. Dikatakan sebagai pembantu karena matematika memfasilitasi seluruh keperluan bidang ilmu untuk mendapatkan kajian ilmiah demi pengembangan ilmu itu sendiri. Dikatakan sebagai ratu karena matematika menguasai seluruh pengetahuan yang dapat digunakan di bidang ilmu lain. Hal ini mengartikan bahwa matematika mencakup dan berperan secara menyeluruh di berbagai bidang ilmu.

Dalam bidang bisnis, matematika memegang peranan penting sebagai alat analisis yang berkaitan dengan masalah kuantitatif. Sebagai ilmu pengetahuan yang mempunyai dimensi permasalahan yang sangat kompleks, ilmu ekonomi dan bisnis memerlukan pengetahuan dan peralatan tambahan hingga didapat penyusunan logika dan kemampuan analisis secara lebih jernih dan tajam, serta sejauh mungkin dapat dicegah adanya kekaburan dan abstraksi dalam dalam melihat dan memecahkan kompleksitas masalah yang muncul dalam bidang tersebut. Dalam hal ini, matematika berperan sebagai pembantu. Dengan menguasai dan menggunakan matematika untuk menganalisis peristiwa atau gejala ekonomi dan bisnis, maka hubungan-hubungan antara berbagai faktor ekonomi dan bisnis dapat dinyatakan secara lebih singkat dan jelas, serta perubahan-perubahannya mudah digambarkan serta dihitung, definisi dan asumsi akan dirumuskan secara tegas, dan penarikan kesimpulan dalam proses analisis dapat lebih sistematis, sehingga kekeliruan yang disebabkan karena analisis yang kabur dapat dihindarkan.

Penerapan matematika pada teori ekonomi dan bisnis dapat pula menunjukkan keterbatasan dan kemungkinan atau peluang yang ada pada suatu perekonomian. Namun betapapun penting dan besar kegunaannya, matematika bukanlah pengetahuan yang menentukan, melainkan perlatan ampuh untuk membantu analisis masalah ekonomi dan bisnis.

Johannes (1989; ix) menyatakan penggunaan matematika dalam analisis ekonomi dan bisnis sangat menguntungkan untuk : 1) hubungan-hubungan anatara besaran-besaran dalam ekonomi dapat dinyatakan secara singkat dan saksama, 2) perubahan-perubahan mudah dilambangkan, dan dihitung, 3) tersedia teorema-

teorema matematika sebagai alat untuk digunakan, 4) definisi dan asumsi harus dirumuskan secara tegas serta juga kesimpulan-kesimpulan pada setiap langkah dalam proses analisis, sehingga menghindarkan diri dari kekaburan, (5) penerapan matematika pada suatu teori ekonomi dapat menampakkan keterbatasan dan kemungkinannya.

Demikian luasnya masalah dalam bidang ekonomi dan bisnis yang dapat diselesaikan oleh matematika, namun dalam penyusunan buku ini, hanya dibatasi pada masalah ekonomi yang dasar, untuk memberikan pemahaman dasar bagi mahasiswa jurusan Sistem Informasi. Mahasiswa di jurusan ini memerlukan analisis ekonomi yang matang sebagai bekal untuk menunjang profesi di masa mendatang.

Surabaya, 1 Agustus 2018
M.J. Dewiyani Sunarto – dewiyani@stikom.edu
Puspita Kartikasari – puspita@stikom.edu

PETA CAPAIAN BELAJAR

(12,13) Mahasiswa dapat **menyelesaikan** masalah dalam proses bisnis operasional dengan berbagai konsep matematika (C3, A5, P5)

⇧

(11) Mahasiswa dapat **menyelesaikan** masalah dalam proses bisnis operasional dengan menggunakan konsep Persamaan Eksponen dan Logartima (C3, A5, P5)

⇧

(10) Mahasiswa dapat **menyelesaikan** masalah dalam proses bisnis operasional dengan menggunakan konsep Sistem Persamaan Linear (C3, A5, P5)

⇧

(8,9) Mahasiswa dapat **menyelesaikan** masalah dalam proses bisnis operasional dengan menggunakan konsep matriks, jenis matriks dan operasi matriks (C3, A5, P5)

⇧

(5,6) Mahasiswa dapat **menyelesaikan** masalah dalam proses bisnis operasional dengan menggunakan konsep persamaan, persamaan literal dan persamaan kuadrat (C3, A5, P5)

⇧

(3,4) Mahasiswa dapat **menyelesaikan** masalah dalam proses bisnis operasional **menggunakan** dengan konsep pecahan, desimal dan persen (C3, A4, P4)

⇧

(1,2) Mahasiswa dapat **menyelesaikan** masalah dalam proses bisnis operasional dengan menggunakan konsep bilangan real (C3, A2, P4)

⇧

Mengetahui Operasi Hitung Dasar

DESKRIPSI MATERI

➢ STRUKTUR MATERI

Buku ini adalah buku matematika untuk bisnis, dan bukan buku bisnis matematis, oleh karenanya tinjauan akan lebih pada materi matematika, yang diterapkan pada bidang bisnis. Tujuan umum dari penulisan buku ini adalah mahasiswa mampu menggunakan kajian matematis untuk menyelesaikan masalah dalam proses bisnis operasional.

Materi yang dipilih dalam buku ajar ini terdiri atas Bilangan Real, Pecahan, Desimal dan Persen, Persamaan dan Pertidaksamaan Linear, Matriks, Sistem Persamaan Linear, Eksponen dan Logaritma. Masing-masing materi akan didahului oleh penanaman konsep kemudian dilanjutkan dengan penerapan dalam bidang bisnis berupa contoh soal.

➢ STRUKTUR PENDEKATAN

Pendekatan yang digunakan pada kedua materi pokok ini lebih ditekankan pada metode penemuan (*inquiri)*, dimana mahasiswa sebagai pembaca diharapkan dapat membangun pengertian melalui proses berpikir masing-masing, dan bukan hanya menerimanya dari pengajar. Oleh karenanya pada setiap bab akan disisipkan pula Lembar Kerja Siswa (LKS). Diharapkan melalui LKS tersebut, mahasiswa dapat mengkonstruk pemahaman mereka selangkah demi selangkah, hingga utuh menjadi suatu pemahaman yang dibangun oleh mahasiswa itu sendiri. Dalam pembahasan di kelas dengan menggunakan buku ini, maka mahasiswa dapat dibagi menjadi kelompok sehingga dapat mengakomodasi jiwa kerjasama di antara mahasiswa, dan dipupuk semangat kejujuran dan integritas bagi mahasiswa hingga dapat dicapainya tujuan kompetensi softskill yaitu mampu menyelesaikan masalah, bekerja sama dalam team, tidak mudah putus asa.

➢ TUJUAN

Buku ini bertujuan untuk :

- Melatih menggunakan konsep matematika untuk menyelesaikan masalah dalam proses bisnis operasional.

- Memungkinkan mahasiswa dapat mengkonstruk pemahaman dengan menggunakan proses berpikir sendiri.

➢ *LEARNING OUTCOMES*

Mahasiswa mampu memecahkan masalah dalam bidang bisnis dengan menggunakan prinsip dasar matematika, melalui kinerja individual maupun secara berkelompok dalam kerjasama tim, secara jujur.

➢ SILABUS

- **Bilangan Real**

  Buku ini akan dimulai dengan membahas bilangan real, yang didahului dengan pengenalan akan jenis bilangan. Konsep mendasar bilangan sangat penting diketahui oleh mahasiswa, karena disanalah semua operasi bilangan akan dimulai. Seringkali konsep bilangan dan operasinya dianggap terlalu mudah untuk dipelajari oleh mahasiswa, namun pada kenyataannya, banyak konsep yang sudah terlupakan, sehingga menimbulkan kesalahan pada perhitungan. Sebagai contoh, pada operasi penjumlahan dan perkalian : 2+3x4, mana yang akan diselesaikan terlebih dahulu? Seringkali mahasiswa telah melupakan bahwa operasi perkalian harus dilakukan terlebih dahulu, baru kemudian penjumlahan.

  Agar dapat mengenal bilangan dengan baik, maka mahasiswa diberi tugas untuk mencari sumber belajar kemudian mempelajari sejarah bilangan, hingga ditemukannya bilangan yang digunakan saat ini. Setelahnya, mahasiswa akan dikenalkan dengan himpunan bilangan beserta sifat nya. Meskipun nampak sederhana, namun konsep ini harus dikenalkan dengan detail, untuk menghindari kesalahan dalam pengoperasian bilangan, yang merupakan salah satu konsep dalam perhitungan bisnis. Setelah konsep bilangan dikuasai, kemudian mahasiswa mulai dilatih dengan beberapa penerapan dalam bisnis.

  Pada bab ini, mahasiswa dikenalkan pula dengan salah satu langkah pemecahan masalah yang terkenal, yaitu langkah Polya. Langkah Polya ini sangat diperlukan untuk melatih mahasiswa berpikir secara terstruktur dalam memecahkan masalah, baik dalam persoalan bisnis maupun dalam kehidupan sehari-harinya.

- **Bilangan Pecahan, Desimal dan Persen**
  Setelah bilangan real dikuasai dengan baik, langkah berikutnya adalah mempelajari bilangan pecahan, desimal dan persen. Ketiga jenis bilangan ini harus dikuasai oleh mahasiswa yang akan mempelajari perhitungan dalam dunia bisnis dengan baik, terutama pada jenis bilangan yang dinyatakan dalam persen. Bentuk persen sangat sering digunakan dalam perhitungan bisnis, seperti pada perhitungan bunga, laba dan lainnya.
- **Persamaan, Persamaan Linear, Persamaan Kuadrat dan Pertidaksamaan**
  Pada bab ini, mahasiswa dilatih untuk mengubah permasalahan (terutama pada masalah bisnis) menjadi suatu model matematika, agar dapat diselesaikan dengan aturan matematika. Bab ini terkait erat dengan langkah pemecahan masalah Polya yang dipelajari pada bab tentang Bilangan Real. Pemodelan ini akan diterapkan pula pada persamaan kuadrat dan pertidaksamaan.
- **Matriks**
  Setelah semua jenis bilangan dikuasai, maka bab berikutnya akan membahas tentang Matriks, yang tentunya menggunakan bilangan sebagai dasarnya. Sebagian besar tidak mengetahui bahwa peran matriks dalam dunia bisnis sangatlah besar, untuk memodelkan dan menyederhanakan perhitungan bisnis yang sering terasa sangat rumit. Dalam bab ini juga dilengkapi dengan perhitungan matriks dengan menggunakan MS Excel, agar perhitungan menjadi mudah, sebab sejatinya yang terpenting adalah pemodelan yang harus dapat dibuat oleh mahasiswa pada suatu masalah bisnis, dan bukan hanya pada perhitungannya.
- **Sistem Persamaan Linear**
  Sistem Persamaan Linear sebenarnya merupakan penerapan matriks. Sistem Persamaan Linear sangat sering dijumpai dalam masalah bisnis. Pada bab ini, dipelajari beberapa cara menyelesaikan Sistem Persamaan Linear, termasuk cara penyelesaian dengan MS Excel. Pada proses

pembelajarannya, hendaknya penyelesaian Sistem Persamaan Linear dikaitkan pula dengan Langkah Pemecahan Masalah dengan Polya seperti telah dibahas pada bab pertama dari buku ini.

- **Persamaan Eksponen dan Logaritma**
  Dasar matematika terakhir yang akan diberikan pada buku Matematika Bisnis ini adalah mengenai bilangan berpangkat, dan logaritma. Pemilihan kedua jenis bilangan ini memang berdasar pada kebutuhan permasalahan seperti bunga, pertumbuhan penduduk dan lain sebagainya.
- **Matematika Keuangan**
  Setelah beberapa dasar matematika yang dirasa penting dalam matematika bisnis diberikan, maka pada bab terakhir diberikan beberapa contoh masalah real dalam dunia bisnis.

➢ LATIHAN MANDIRI

Latihan secara kontinu dan konsisten merupakan hal yang penting untuk meraih sebuah kesuksesan. Telah memahami suatu materi tidak cukup untuk berhasil dan mendapatkan nilai sempurna. Tanpa latihan rutin, seperti juga sifat dari hampir semua materi di dalam matematika, maka tidaklah cukup untuk mengerjakan soal pada saat ujian, dengan waktu yang tentunya dibatasi, secara baik. Bagaikan seorang pembalap di arena balap, tidaklah cukup hanya mengetahui di mana dan bagaimana sifat gas, rem, pedal, jalan mana yang harus dilalui dan lain lain, namun juga menjadi sangat penting seberapa banyak pembalap terus melakukan latihan secara rutin.

Sumber latihan dapat diperoleh dengan cara yang mudah dan di manapun. Tingkatkan terus daya eksplorasimu. Jangan hanya cukup dengan soal yang diberikan di kelas, maupun yang telah tercantum dalam buku ini. Masih sangat banyak sumber lain yang bisa Anda dapatkan. Perkayalah ilmu sebanyak banyaknya !

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I BILANGAN REAL

Tujuan Instruksional :

Setelah mengikuti perkuliahan dengan materi dari Bab I, diharapkan mahasiswa mampu :

- Memberi contoh himpunan.
- Menentukan jenis himpunan bilangan.
- Menentukan himpunan bilangan dalam garis bilangan.
- Menerapkan sifat bilangan real dalam penyelesaian masalah bisnis.
- Menentukan fungsi dan bukan fungsi

Dalam Bab I ini akan ditelusuri asal mula bilangan, sampai pada ditemukannya Bilangan Real yang dilengkapi dengan sifat, pengoperasian dan penerapan dalam dunia bisnis. Bab I ini dapat digunakan selama 2 pertemuan @ 3 sks, yaitu sesuai dengan RPS Matematika Bisnis, di pertemuan 1 dan 2 di mana pertemuan 1 pembahasan mengenai teori dan beberapa latihan, dan pertemuan 2 diisi dengan latihan soal untuk memumpuk ketrampilan pemecahan masalah pada mahasiswa.

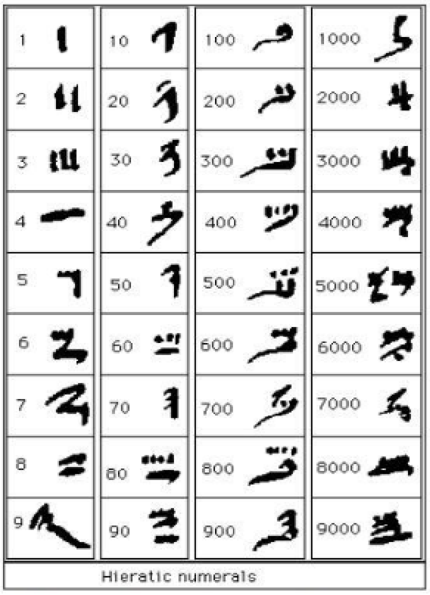
1.1. Sejarah Bilangan

Tanpa disadari, setiap hari manusia selalu menggunakan bilangan dalam aktifitas kehidupannya, mulai bangun di pagi hari yang pertama dilihat tentulah bilangan, yaitu waktu untuk menyiapkan diri beraktivitas, sampai malam hari ketika kembali beristirahat, tidak terhitung banyaknya bilangan bermanfaat bagi kehidupan manusia. Namun, sejarah penemuan bilangan itu sendiri sering dilalaikan, padahal manfaat bilangan telah dirasakan sungguh luar biasa. Oleh karenanya, sebelum mempelajari jenis bilangan, mari sedikit kita telusuri terlebih dahulu sejarah bilangan.

(Sumardyono, 2017) menyatakan bahwa bilangan yang digunakan sekarang ini sering disebut Angka Arab, Angka Hindu-Arab, atau Angka Hindu. Apa yang disebut Hindu dalam banyak literatur menunjuk pada makna India, suatu wilayah peradaban yang maju sejak zaman dulu. Secara kronologisnya walau dalam bentuk yang berbeda, angka yang kita gunakan sekarang ini berasal mula dari

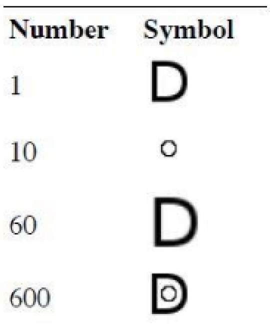
India, lalu mengalami perubahan di wilayah Arab, baru kemudian diterima di Eropa dan di seluruh dunia.

Beberapa contoh lambang bilangan pada awal mulanya adalah:

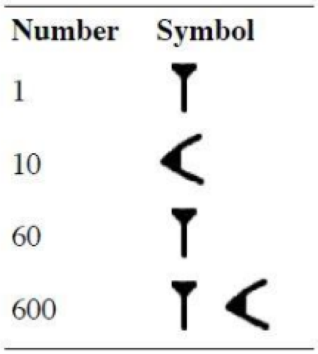


Gambar 1.1. Bilangan Egypt

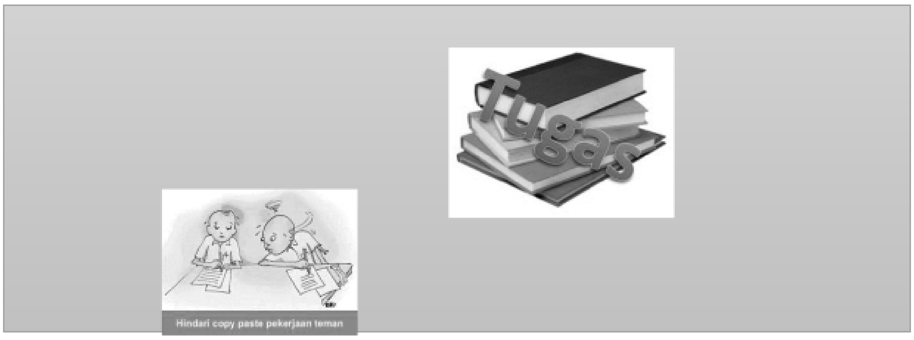
Sumber : Weibull, 2017



Gambar 1.2. Bilangan Sumerian (Sumber : Weibull, 2017)



Gambar 1.3. Bilangan Babylonia (Sumber : Weibull, 2017)



Buat makalah tentang Sejarah Bilangan mulai dari asal penemuan sampai pada jenis bilangan yang ada saat ini. Jangan lupa tuliskan sumbernya secara lengkap.

1.2. Sejarah Perkembangan Bilangan

Setiap suku bangsa memiliki berbagai cara dalam perkembangan bilangannya. Pada suku Babylonia bilangan ditulis dengan menggunakan bilangan seksagesimal yaitu bilangan yang berbasis 60. Dan dari situlah dikenal dengan istilah 60-Detik untuk satu menit, 60-menit untuk satu jam. Matematika Babilonia merujuk pada seluruh matematika yang dikembangkan oleh bangsa Masepotamia (Iraq) sejak permulaan Sumeria hingga permulaan peradaban halenistik. Setelah itu disusul dengan bangsa Mesir.

Tulisan matematika Mesir yang paling panjang adalah lembaran Rhind atau disebut juga lembaran Ahmes. Diperkirakan berasal dari tahun 1650 SM tetapi mungkin lembaran itu adalah salinan dari dokument yang lebih tua dari kerajaan tengah yaitu dari tahun 2000-1800 SM. Lembaran itu adalah manual intruksi bagi pelajaran aritmatika geometri dan harmonik dan pemahaman sederhana saringan Eratosthenes dan teori bilangan sempurna (yaitu bilangan 6).

Sistem penulisan orang-orang mesir menggunakan simbol Hieroglif dan Hieratic : Hieroglif adalah gambar kecil yang mewakili kata-kata. Misalnya, untuk menggambarkan dengan kalimat “Aku mendengar anjing menggonggong” mungkin diwakili oleh “Mata”,”telinga”. Simbol yang sama mungkin berarti seseuatu yang berbeda dalam konteks yang berbeda, jadi “mata” mungkin berarti “melihat”. Orang mesir memiliki sistem bilangan basis 10 hieroglif.

Bilangan dahulunya digunakan sebagai simbol untuk menggantikan suatu benda misalnya adalah kerikil, ranting yang masing-masing suku atau bangsa memiliki cara tersendiri untuk menggambarkan bilangan dalam bentuk simbol diantarannya adalah sebagai berikut (Supu, 2014):

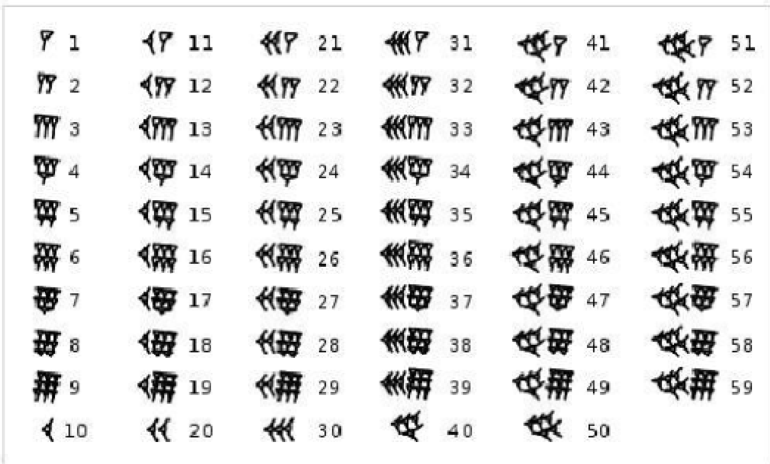
1. Simbol bilangan bangsa Babilonia.
2. Simbol bilangan bangsa Maya di Amerika pada 500 SM.
3. Simbol menggunakan huruf Hieroglif yang dibuat bangsa Mesir Kuno.
4. Simbol bilangan bangsa Romawi yang juga masih dipakai hingga kini.

Pada buku ini akan ditampilkan sejarah bilangan pada beberapa suku bangsa, dan bukan keseluruhannya. Keseluruhan sejarah bilangan diserahkan kepada mahasiswa untuk melengkapinya.

1.2.1. Bilangan Pada Suku Bangsa Babilonia

Matematika Babilonia merujuk pada seluruh matematika yang dikembangkan oleh bangsa Masepotamia (Iraq) sejak permulaan Sumeria hingga permulaan peradaban halenistik. Dinamai “MATEMATIKA BABILONIA” karena peran utama kawasan Babilonia sebagai tempat untuk belajar.

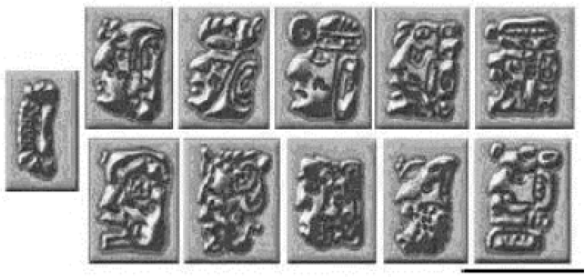
Lambang bilangan pada bangsa Babilonia tampak pada Gambar 1.4.



Gambar 1.4. Bilangan Babylonia hingga 59

1.2.1 Bilangan Pada Suku Bangsa Maya

Sistem Maya menggunakan kombinasi 2 simbol. Titik (.) digunakan untuk mewakili unit (1-4) dan sejumput (-) digunakan untuk mewakili lima. Bangsa Maya menulis jumlah mereka secara vertical sebagai lawan horizontal dengan nominasi terendah di bagian bawah. Lambang Maya angka 0-10 .



Gambar 1.5. Lambang 1-10 Bangsa Mesir 1

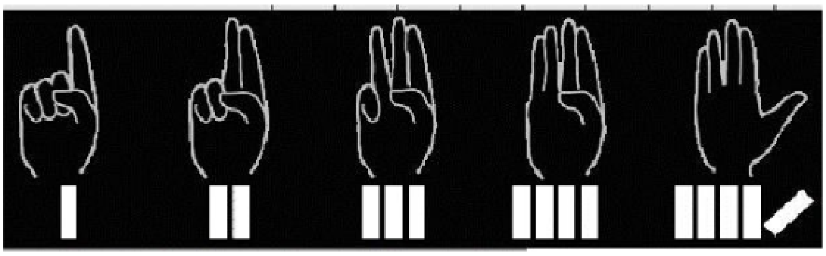
1.2.2. Bilangan Pada Bangsa Mesir Kuno

Di Mesir, sejak sekitar 3000 tahun SM, bukti sejarah bilangan yang ditemukan pada tulisan- tulisan pada batu, dinding, tembikar, plak kapur dan monument menyebutkan bahwa 1 disimbolkan sebagai garis vertical, sedangkan 10 diwakili sebagai lambang ^ . Orang Mesir menulis dari kanan ke kiri jadi bilangan 23 disimbolkan menjadi |||^^ .

Gambar 1.6. Lambang Bilangan Mesir Kuno

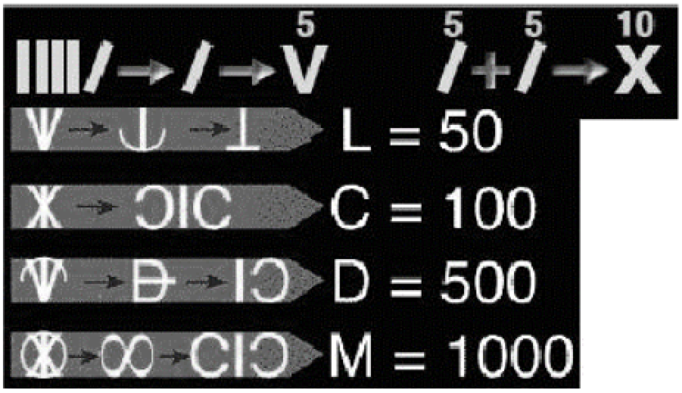
1.2.3. Bilangan Pada Bangsa Romawi

Angka Romawi menggunakan sistem bilangan berbasis 5. Angka I dan V dalam angka romawi terinspirasi dari bentuk tangan yang merupakan alat hitung alami, yang sampai saat ini sering digunakan untuk menghitung. Sedangkan angka X lambang dari 10 adalah gabungan dua garis miring yang melambangkan 5. Dan L,C,D dan M yang secara urut mewakili 50,100,500,dan 1000 merupakan modifikasi dari symbol V dan X .



Gambar 1.7. Angka Romawi Terinspirasi Bentuk Tangan

Garis yang miring mewakili jempol,yang kemudian menjadi symbol 5, X adalah gabungan dari 2 garis miring.



Gambar 1.8. Modifikasi Angka Romawi 1

Simbol L,C,D dan M merupakan modifikasi dari symbol V dan X. Untuk menulis angka, orang Romawi menggunakan 2 sistem yaitu :

- Sistem Penjumlahan, misalnya V+II = VII (7) atau C+X+X+I = CXXI (121)
- Sistem Pengurangan , misalnya IX (I sebelum X) = 9 atau XCIV (X sebelum C =90, I sebelumV = 4)

1.3. Jenis Bilangan

Di dalam matematika, memang terdapat beberapa himpunan bilangan (kumpulan beberapa bilangan dengan sifat tertentu), di antaranya :

a **Bilangan Asli**, merupakan himpunan bilangan yang pertama ditemukan oleh manusia. Bilangan asli dimulai dengan angka 1. Jadi himpunan bilangan asli beranggotakan bilangan yang dimulai dari bilangan 1 yaitu 1,2,3,…Notasi himpunan bilangan asli biasanya dilambangkan dengan A = { 1,2,3, …}.

b **Bilangan Cacah = Bilangan Bulat Positif,** merupakan himpunan bilangan yang hampir sama dengan bilangan Asli, namun ditambahkan dengan angka 0. Notasi himpunan bilangan bulat positif dilambangkan dengan B^{+}= {0,1,2,3, … }.

c **Bilangan Bulat Negatif,** merupakan himpunan bilangan yang telah mengenal bilangan yang lebih kecil dari bilangan 0. Notasi himpunan bilangan bulat negatif dilambangkan dengan B-={ …., -3,-2,-1, 0}

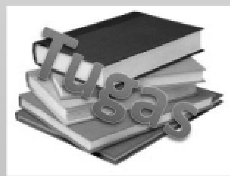
d **Bilangan Bulat,** merupakan gabungan dari bilangan bulat positif dan bilangan bulat negatif. Bilangan bulat merupakan bilangan yang paling umum digunakan, terutama pada dunia bisnis. Notasi himpunan bilangan bulat negatif dilambangkan dengan B^-={ …., -3,-2,-1, 0, 1,2,3, ….}

e **Bilangan Rasional,** merupakan perluasan himpunan bilangan bulat, karena pada himpunan bilangan bulat, terdapat pula bilangan pecahan. Bilangan rasional dapat didefiniskan dengan : R = { x l x = $\frac{a}{b}$, a dan b $anggota$ $bilangan$ $bulat$, dan $b \neq 0$}. Perlu dijelaskan, mengapa harus diberi syarat pembagi tidak boleh bilangan 0, adalah karena kita ingat bahwa semua bilangan jika dibagi dengan angka 0, maka hasilnya adalah tidak ada/tidak didefinisikan/tak hingga. Contoh bilangan rasional : $\frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{15}{18}, \frac{-23}{25}$.

f **Bilangan irasional**, merupakan himpunan bilangan yang tidak dapat dinyatakan dengan bilangan rasional. Contoh : $\sqrt[3]{7}, \sqrt{10}, \pi$. Bilangan irasional sangat jarang digunakan dalam bisnis, sehingga tidak akan dibahas pada buku ini, dan hanya sebagai tambahan pengetahuan saja.

g **Bilangan real,** merupakan gabungan dari bilangan rasional dan bilangan irasional. Dengan terciptanya sistem bilangan real, maka pada garis bilangan tidak terdapat lagi tempat yang kosong. Maksudnya ialah bahwa antara bilangann real dengan titik pada garis bilangan ada hubungan satu-satu.

h **Bilangan kompleks,** merupakan wadah bagi bilangan imaginer. Bilangan imaginer ini digunakan untuk menjawab pertanyaan : " Bilangan yang mana yang kuadratnya sama dengan -1? atau x^2 = -1". Bilangan kompleks ditulis dengan a + i b, di mana a dan b adalah anggota bilangan real, serta i^2 = -1. Contoh bilangan kompleks adalah 2 + 4i, 3+2i, -3+i dan lain-lain.



Buat gambar hubungan antar macam-macam bilangan, dengan diagram atau dengan pohon struktur

1.4. Sifat Bilangan Real

Jika a, b, dan c mewakili bilangan Real, maka berlakulah sifat-sifat berikut :

Tabel 1.1. Sifat Bilangan Real

Nama Sifat	Penjelasan	Contoh
1. Persamaan transitif	Jika a = b dan b = c, maka a =c.	Jika x = y, dan y =9, maka x =9.
2. Sifat Tertutup	Jika a dan b dioperasikan (baik penjumlahan, pengurangan, perkalian, maupun pembagian (bukan dibagi dengan bilangan nol)), maka hasilnya tetap bilangan Real.	• 5 + 7 = 12 anggota bilangan Real • 5 – 7 = -2 anggota bilangan Real • 5 x 7 = 35 anggota bilangan Real • $\frac{5}{7}$, anggota bilangan Real
3. Sifat komutatif penjumlahan dan perkalian	a + b = b + a a x b = b x a	5 + 7 = 12 = 7 + 5 5 x 7 = 35 = 7 x 5
4. Sifat assosiatif penjumlahan dan perkalian	(a + b) + c = a + (b + c) (a x b) x c = a x (b x c)	(5 + 7) + 3 = 15 = 5 + (7 + 3) (5 x 7) x 3 = 105 =5 x (7 x 3)
5. Sifat Identitas penjumlahan	Bilangan 0 adalah bilangan identitas untuk penjumlahan. Ini berarti setiap bilangan yang ditambah dengan bilangan 0, hasilnya sama dengan bilangan itu sendiri.	5 + 0 = 5 7 + 0 = 7
6. Sifat Identitas perkalian	Bilangan 1 adalah bilangan identitas untuk perkalian. Ini berarti setiap bilangan yang dikalikan dengan bilangan 1, hasilnya sama dengan bilangan itu sendiri.	5 x 1 = 5 7 x 1 = 7
7. Sifat Invers Penjumlahan	Invers penjumlahan dari	Invers penjumlahan dari

Nama Sifat	Penjelasan	Contoh
	bilangan a adalah –a, karena a + (-a) = 0 (bilangan identitas penjumlahan)	bilangan 5 adalah -5 karena 5 + (-5) = 0
8. Sifat Invers Perkalian	Invers perkalian dari bilangan a adalah $\frac{1}{a}$, karena a x $\frac{1}{a}$ = 1 (bilangan identitas perkalian)	Invers perkalian dari bilangan 5 adalah $\frac{1}{5}$ karena 5 x ($\frac{1}{5}$) = 1
9. Sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan	a(b + c) = ab + ac (b+c)a = ba + ca	5(7+3)=(5x7) + (5x3) = 50 (7+3)x5 = (7x5) + (3x5) = 50

1.5. Contoh Penerapan Sifat Bilangan Real dalam dunia Bisnis

Contoh 1 :

Ali dan Badu sedang membeli beras di toko Maju Jaya. Ali mengatakan, akan membeli 9 kg beras, Badu mengatakan, akan membeli beras sejumlah sama dengan Ali. Berapa beras yang akan dibeli Badu? Sifat bilangan real apa yang digunakan?

Jawab :

A = B, A = 9, Jadi B = 9. Sifat yang digunakan : transitif.

Contoh 2 :

Candra membeli buku tulis dan buku gambar di toko buku Inti Media, dengan harga yang sama, yaitu Rp 2.500,-. Candra membeli 3 buku tulis dan 5 buku gambar. Berapa yang harus dibayar? Gunakan 2 cara yang berbeda untuk menghitungnya. Sifat bilangan real apa yang digunakan?.

Jawab :

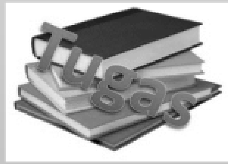
Alternatif 1 : Karena harga buku tulis dan buku gambar sama, maka Candra menghitung dengan cara menjumlah barang yang akan dibeli, yaitu 8 buku, kemudian dikalikan dengan harga buku gambar/buku tulisnya.

Jadi : (3+5)x 2.500 = 8 x 2.500 = Rp 20.000,-

<u>Alternatif 2 :</u> Dihitung harga yang harus dibayar untuk masing-masing buku gambar dan buku tulis. Harga yang harus dibayar untuk buku gambar adalah 3 buku @ Rp 2.500,- yaitu Rp 7.500,- dan harga yang harus dibayar untuk buku tulis adalah 5 buku @ Rp 2.500,- yaitu Rp 12.500,-. Sehingga yang harus dibayar oleh Candra adalah Rp 7.500,- + Rp 12.500,- = Rp 20.000,-

Jadi : (3x 2.500) + (5x2.500) = 7.500 + 12.500 = Rp 20.000,-

Sifat yang digunakan : sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan



Buat masing-masing satu contoh untuk 3 sifat bilangan real dalam penerapan di dunia Bisnis

1.6. Tips : Strategi Pemecahan Masalah dari Polya

Pemecahan masalah merupakan hal yang penting pada hampir setiap mata kuliah yang dihadapi oleh mahasiswa. Untuk memecahkan masalah, terdapat suatu strategi tertentu. Terdapat beberapa strategi pemecahan masalah. Kali ini, akan diperkenalkan strategi pemecahan masalah dari Polya (Polya, 2014).

Polya membagi strategi pemecahan masalah menjadi 4 bagian, yaitu :

Tabel 1.2. Strategi Pemecahan Masalah Polya

Langkah 1	Langkah 2	Langkah 3	Langkah 4
Memahami Masalah	Merencanakan pemecahan masalah	Melaksanakan rencana pemecahan masalah	Memeriksa kembali jawaban
Tentukan : - Apa yang diketahui - Apa yang	Tentukan : - Hubungan antara yang diketahui dan yang ditanyakan.	- Gunakan urutan pengerjaan seperti pada langkah 2.	Gunakan cara yang berbeda, untuk memastikan bahwa jawaban yang

Langkah 1	Langkah 2	Langkah 3	Langkah 4
ditanyakan	- Rumus/formula apa yang dapat digunakan untuk menyelesaikan hal yang ditanyakan. - Urutan pengerjaannya	- Setelah pengerjaan selesai dilakukan, beri kesimpulan tentang solusi yang didapatkan.	didapatkan telah benar

Contoh 1 : Penyelesaian masalah dengan Polya

Pak Badu adalah seorang supervisor pengadaan daging pada sebuah pabrik pembuat abon. Untuk menghadapi lebaran tahun ini, yang biasanya permintaan melonjak, maka pak Badu harus memastikan apakah stok daging dapat memenuhi permintaan konsumen. Dari laporan pada masing-masing cabang, pak Badu mendapatkan data

Tabel 1.3. Jumlah Stok Daging pada Masing-masing Cabang

Cabang	Jumlah Stok (kg)
Jakarta	4.275
Surabaya	3.245
Semarang	2.115

Berdasar pengalaman tahun lalu, dibutuhkan stok paling sedikit 10.000 kg daging untuk memenuhi kebutuhan lebaran. Apakah pak Badu dapat memenuhi kebutuhan akan daging untuk pembuatan abon pada tahun ini?

Jawab :

Dengan menggunakan langkah Polya, maka penyelesaian dari masalah pada contoh 3 ini adalah :

Tabel 1.4. Pemecahan Contoh 1 dengan Strategi Pmecahan Masalah Polya

Langkah 1	Langkah 2	Langkah 3	Langkah 4
Memahami Masalah	Merencanakan pemecahan masalah	Melaksanakan rencana pemecahan masalah	Memeriksa kembali jawaban
- Diketahui : data masing-masing kota	- Jumlahkan stok pada seluruh cabang.	- Jumlah stok pada seluruh cabang adalah 4.275 +	Gunakan cara yang berbeda dari langkah 3 :

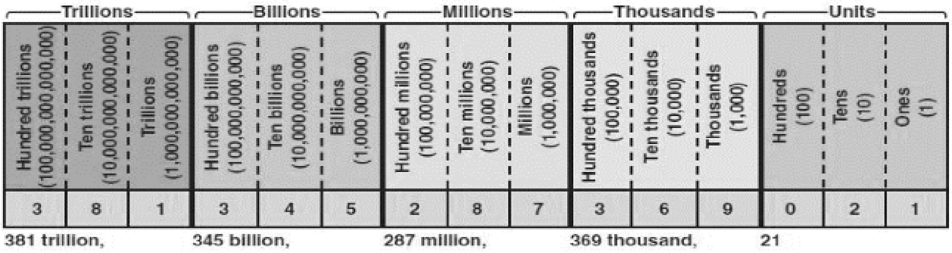
Langkah 1	Langkah 2	Langkah 3	Langkah 4
akan kebutuhan daging sapi - Ditanyakan : apakah kebutuhan tersebut dapat memenuhi permintaan daging pada lebaran tahun ini.	- Jika jumlah stok pada seluruh cabang , lebih besar atau sama dengan permintaan daging tahun ini (10.000 kg), maka kebutuhan daging akan terpenuhi. - Jika lebih kecil, maka tidak terpenuhi.	3.245 + 2.115 = 9.635 kg - Karena jumlah stok pada seluruh cabang lebih kecil dari kebutuhan, maka dapat disimpulkan akan ada kekurangan stok daging untuk pembuatan abon pada lebaran tahun ini. - Kesimpulan : pak Badu tidak dapat memenuhi kebutuhan akan daging untuk pembuatan abon pada tahun ini.	- Kebutuhan daging pada pabrik abon untuk memenuhi kebutuhan lebaran adalah 10.000 kg. - Kebutuhan ini dicukupi oleh cabang Jakarta sebesar 4.275 kg, sehingga masih dibutuhkan 10.000 kg – 4.275 kg = 5.725 kg. - Cabang Surabaya mempunyai 3.245 kg, sehingga masih dibutuhkan 5.725 kg -3.245 kg = 2.480 kg. - Cabang Semarang hanya mempunyai 2.115 kg, sehingga masih ada kekurangan : 2.480 kg – 2.115 kg = 365 kg. Jawaban yang didapat dari langkah 3 benar, karena ternyata masih dibutuhan daging

Langkah 1	Langkah 2	Langkah 3	Langkah 4
			sebanyak 365 kg.

1.7. Nilai Tempat Bilangan Real

Nilai tempat adalah nilai suatu angka dalam suatu bilangan tertentu. Nilai tempat suatu angka mempunyai berbagai tingkat bergantung dari letak bilangan tersebut. Tingkatan tempat tersebut adalah satuan, puluhan, ratusan, ribuan, puluhan ribu dan seterusnya.

Secara umum, gambar nilai tempat adalah :



Gambar 1.9. Nilai Tempat

Sumber : Cleaves, 2012

Dari gambar dapat dilihat bahwa posisi paling kiri adalah tempat untuk satuan, diikuti puluhan, ratusan, ribuan, puluhan ribu, ratusan ribu, jutaan, puluhan juta, ratusan juta, milyard, puluhan milyard, dan seterusnya.

Contoh 1 :

Sebutkan nilai tempat dari 287.369.221

Jawab : Karena nilai tempat dari bilangan 287.369.221 dimulai pada urutan ke 6 dari kanan, maka sesuai gambar 4, akan dimulai dengan ratusan juta, sehingga nilai tempat dari 287.369.221 dapat ditulis sebagai : dua ratus delapan puluh tujuh juta, tiga ratus enam puluh sembilan ribu, dua ratus dua puluh satu.

1.8. Contoh Soal dan Penyelesaiannya

Contoh 1 :

(Cleaves, 2012) Pada sebuah presentasi laporan penjualan, Mary melaporkan hasil penjualan sampai tengah tahun 2017 adalah sebesar sembilan ratus empat puluh dua juta, enam ratus enam puluh dua ribu, lima ratus tiga puluh delapan rupiah. Mary membandingkan hasil penjualan pada tengah tahun 2016, yaitu sebesar satu milyard, lima ratus ribu, duapuluh sembilan rupiah. Tuliskan dalam angka, dan penghasilan di tahun manakah yang lebih besar?

Jawab :

Hasil penjualan pada tengah tahun 2017 dimulai dari ratusan juta, maka kita ketahui akan terdiri dari 9 digit, sehingga hasil penjualan itu adalah **Rp 942.662.538,-**

Sedang hasil penjualan pada tengah tahun 2016 dimulai dari satu milyard, maka kita ketahui akan terdiri dari 10 digit, sehingga hasil penjualan itu adalah **Rp 1.000.500.209,-**

Karena hasil penjualan pada tengah tahun 2016 terdiri dari 10 digit, dan tahun 2017 hanya terdiri dari 9 digit, maka dapat disimpulkan bahwa penjualan di tengah tahun 2016 lebih besar daripada penjualan di tengah tahun 2017, atau dapat dikatakan terjadi penurunan hasil penjualan di tahun 2017.

Contoh 2 :

Sebagai seorang kasir, Sidik hendak membuatkan kuitansi untuk pembayaran pelanggan atas pembelian bahan baku besi dari perusahaannya. Pada bulan Januari, pelanggan tersebut membeli bahan baku besi sebesar Rp 102.529.564,- dan pada bulan Februari sebesar Rp 90.659.732,-. Bantulah Sidik untuk menuliskan nilai tempat pada kuitansi nya.

Jawab :

Penulisan di kuitansi untuk pembelian di bulan Januari, akan dimulai dari ratusan juta, karena terdiri dari 9 digit, yaitu : Seratus dua juta, lima ratus dua puluh sembilan ribu, lima ratus enam puluh empat rupiah.

Penulisan di kuitansi untuk pembelian di bulan Februari, akan dimulai dari puluhan juta, karena terdiri dari 8 digit, yaitu : Sembilan puluh juta, enam ratus lima puluh sembilan ribu, tujuh ratus tiga puluh dua rupiah.

Contoh 3:

(Cleaves, 2012) Sebuah perusahan plastik film dapat memproduksi 75 roll plastik pada setiap mesin, dalam setiap jam nya. Perusahaan tersebut mempunyai 15 mesin. Berapa roll plastik per hari yang dapat diproduksi, jika semua mesin beroperasi selama 24 jam? Kerjakan dengan strategi pemecahan Polya.

Jawab :

Tabel 1.5. Strategi Pemecahan Masalah Polya untuk Contoh 3

Langkah 1	**Langkah 2**	**Langkah 3**	**Langkah 4**
Memahami Masalah	Merencanakan pemecahan masalah	Melaksanakan rencana pemecahan masalah	Memeriksa kembali jawaban
- Diketahui : jumlah yang dapat diproduksi pada setiap mesin, setiap jam, dan jumlah mesin yang tersedia. - Ditanyakan : jumlah roll plastik yang dapat diproduksi secara keseluruhan	- Hitung produksi setiap hari untuk setiap mesin - Hitung produksi setiap hari untuk seluruh mesin yang ada	- Produksi setiap hari untuk setiap mesin adalah 75 roll x 24 jam = 1800 roll - Produksi setiap hari untuk seluruh mesin = 1800 roll x 15 mesin = 27.000 roll - Jadi roll plastik yang dapat diproduksi dalam setiap hari untuk seluruh mesin adalah 27.000 roll	- Dengan menggunakan sifat assosiatif perkalian, maka dapat ditentukan terlebih dahulu jumlah produksi semua mesin dalam setiap jam nya, yaitu 75 roll x 15 mesin = 1125 roll. - Dalam satu hari, akan diproduksi roll plastik sebanyak 1125 roll x 24 jam = 27.000 roll - Jadi roll plastik yang dapat diproduksi dalam setiap hari untuk seluruh mesin adalah 27.000 roll.

Contoh 4 :

(Cleaves, 2012) Malina membuat 48 cangkir kopi dan 72 cangkir teh setiap harinya di sebuah kedai kopi. Berapa kopi dan teh keseluruhan yang dapat diproduksi dalam sebulan, jika kedai kopi tadi dalam sebulan buka selama 22 hari? Jika 809 cangkir kopi dan 1242 teh telah terjual dalam bulan itu (dengan 22 hari dalam sebulan jam buka kedai kopi itu), berapa masing-masing kopi dan teh harus ditambahkan? Kerjakan dengan strategi pemecahan masalah Polya.

Jawab :

Tabel 1.6. Strategi Pemecahan Masalah Polya untuk Contoh 4

Langkah 1	**Langkah 2**	**Langkah 3**	**Langkah 4**
Memahami Masalah	Merencanakan pemecahan masalah	Melaksanakan rencana pemecahan masalah	Memeriksa kembali jawaban
- Diketahui : banyaknya kopi dan teh yang dapat dibuat setiap harinya pada sebuah kedai kopi. Diketahui juga jumlah hari buka dalam setiap harinya, serta jumlah dalam kopi dan teh dalam setiap bulan. - Ditanyakan : a. Keseluruhan kopi dan teh yang dapat diproduksi dalam setiap	- Hitung masing-masing produksi kopi dan teh dalam sebulan - Jumlahkan produksi secara keseluruhan. - Kurangkan masing-masing produksi dari 809 kopi dan 1242 teh	- Produksi setiap bulan untuk kopi adalah 22 hari x 48 cangkir kopi = 1.056 cangkir kopi. - Produksi setiap bulan untuk teh adalah 22 hari x 72 cangkir kopi = 1.584 cangkir teh. - Jumlah produksi keseluruhan adalah = 1.056 + 1.584 = 2.640 cangkir - Kopi yang harus ditambahkan = 1.506 – 809 cangkir = 697 cangkir kopi - Teh yang harus ditambahkan =	- Dengan menggunakan sifat assosiatif penjumlahan dan perkalian, maka dapat dihitung terlebuh dahulu jumlah kopi dan teh yang diproduksi dalam setiap hari, yaitu sejumlah 48 cangkir kopi + 72 cangkir teh = 120. - Jika sebulan buka dalam 22 hari, maka jumlah produksi keseluruhan adalah = 120 cangkir x 22 hari = 2.640

Langkah 1	**Langkah 2**	**Langkah 3**	**Langkah 4**
bulan. b. Berapa kopi dan teh yang harus ditambahkan jika diproduksi pada jumlah 809 kopi dan 1242 teh.		2.640 – 1.242 = 1.398 cangkir teh	cangkir

1.9. Rangkuman

1. Sejarah Perkembangan Bilangan
   - Pada suku Babylonia bilangan ditulis dengan menggunakan bilangan seksagesimal yaitu bilangan yang berbasis 60.
   - Pada suku bangsa maya, Sistem Maya menggunakan kombinasi 2 simbol. Titik (.) digunakan untuk mewakili unit (1-4) dan sejumput (-) digunakan untuk mewakili lima.
   - Pada Bangsa Mesir Kuno, Orang Mesir menulis dari kanan ke kiri jadi bilangan 23 disimbolkan menjadi |||^^.
   - Pada Bangsa Romawi, Angka Romawi menggunakan sistem bilangan berbasis 5. Angka I dan V dalam angka romawi terinspirasi dari bentuk tangan yang merupakan alat hitung alami, yang sampai saat ini sering digunakan untuk menghitung.
2. Jenis Bilangan
   - Bilangan Asli merupakan himpunan bilangan yang pertama ditemukan oleh manusia. Bilangan asli dimulai dengan angka 1.
   - **Bilangan Cacah = Bilangan Bulat Positif,** merupakan himpunan bilangan yang hampir sama dengan bilangan Asli, namun ditambahkan dengan angka 0.
   - **Bilangan Bulat Negatif,** merupakan himpunan bilangan yang telah mengenal bilangan yang lebih kecil dari bilangan 0.

- **Bilangan Bulat,** merupakan gabungan dari bilangan bulat positif dan bilangan bulat negatif.
- **Bilangan Rasional,** merupakan perluasan himpunan bilangan bulat, karena pada himpunan bilangan bulat, terdapat pula bilangan pecahan. Bilangan rasional dapat didefiniskan dengan : R = { x | x = $\frac{a}{b}, a\ dan\ b\ anggota\ bilangan\ bulat, dan\ b\ \neq\ 0$}.
- **Bilangan irasional**, merupakan himpunan bilangan yang tidak dapat dinyatakan dengan bilangan rasional.
- **Bilangan real,** merupakan gabungan dari bilangan rasional dan bilangan irasional.
- **Bilangan kompleks,** merupakan wadah bagi bilangan imaginer.

3. Terdapat 9 siifat bilangan real yaitu :
   - Sifat transitif
   - Sifat Tertutup
   - Sifat komutatif penjumlahan dan perkalian
   - Sifat assosiatif penjumlahan dan perkalian
   - Sifat Identitas penjumlahan
   - Sifat Identitas perkalian
   - Sifat Invers Penjumlahan
   - Sifat Invers Perkalian
   - Sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan
4. Nilai tempat bilangan real adalah nilai suatu angka dalam suatu bilangan tertentu. Nilai tempat suatu angka mempunyai berbagai tingkat bergantung dari letak bilangan tersebut

1.10. Latihan Soal Mandiri (Cleaves, 2012)

1. Sebuah perusahaan kapal berhasil menjual 352 kapal selama tahun 2016. Jika keuntungan tahunan perusahaan tersebut adalah $324.800, berapa keuntungan yang didapat dari sebuah kapal? Tuliskan keuntungan tahunan tersebut dalam nilai tempat.

2. Sebuah perusahaan menginvestasikan 7 milyar rupiah untuk mengembangkan usahanya dalam bidang penelitian dan pengembangan. Tuliskan investasi tersebut dalam angka.
3. Sebuah buku matematika bisnis berisi 3 halaman yang berisi kesimpulan pada setiap akhir babnya. Buku tersebut terdiri dari 16 bab. Berapa jumlah halaman keseluruhan dari buku tersebut?
4. Sebuah toko mainan anak mengadakan promosi untuk penjualan boneka. Harga boneka tanpa promosi adalah Rp 15.000,-, namun pada saat promosi, dijual dengan harga Rp 27.000,- untuk 2 buah boneka. Jika Ani membeli 4 buah boneka, berapa selisih harga jika dibeli waktu promosi dan tidak promosi?. Gunakan strategi pemecahan Polya untuk menyelesaikannya.
5. Gerai Mc Donat mendapatkan laba dari cabang Rungkut sebesar Rp 23.456.770,- dan cabang Sungkono sebesar Rp 12.212.760 per hari. Berapa laba yang didapat dari kedua cabang tersebut dalam seminggu, jika gerai buka 7 hari dalam seminggu?
6. Sebuah perusahaan permen Atkinson memproduksi 7 macam permen untuk dikemas dalam permen campuran yang sangat laris dibeli oleh keluarga-keluarga di Amerika. Sejumlah besar permen tersebut berasal dari 84 boks tempat permen, dimana masing-masing boks tempat permen berisi 25 ons permen. Permen tersebut dijual dalam bentuk plastik, di mana masing-masing plastik berisi 3 ons permen, kemudian dalam setiap 12 plastik, dibentuk dalam satu kotak. Bagian produksi permen Atkinson melaporkan, bahwa saat ini tersedia 1.000 plastik dan telah tersedia 12 kotak yang siap digunakan untuk mewadahi permen tersebut?
7. Sebuah perusahaan pakaian mentargetkan pendapatan sebesar Rp 1.384.000,- selama seminggu buka toko (5 hari kerja) dari seluruh cabangnya. Hasil penjualan selama seminggu nampak pada tabel 7. Lengkapi jumlah pendapatan per hari dan per cabang. Apa beda antara target dan hasil penjualan?. Apakah target toko tersebut tercapai? Gunakan strategi pemecahan Polya untuk menyelesaikannya.

Tabel 1.7. Hasil Penjualan Perusahaan Pakaian Selama Lima Hari Kerja

Daerah	Selasa	Rabu	Kamis	Jumat	Sabtu	Total per daerah
Utara	Rp 72.492	Rp 81.948	Rp 32.307	Rp 24.301	32.589	…….
Selatan	81.897	59.421	48.598	61.025	21.897	…….
Timur	71.708	22.096	23.222	21.507	42.801	…….
Barat	61.723	71.687	52.196	41.737	22.186	…….
Total per hari	…….	…….	…….	…….	…….	…….

8. Bronwyn ingin membeli rumah, sehingga ia memutuskan untuk menabung seperempat dari gajinya. Bronwyn mendapat gaji \$47 per jam dan menerima ekstra \$28 per minggu karena ia menolak tunjangan dari perusahaan. Bronwyn ingin menabung paling tidak \$550 per minggu. Berapa jam Bronwyn harus bekerja tiap minggunya agar bisa mencapai jumlah tersebut. Gunakan strategi pemecahan Polya untuk menyelesaikannya.
9. Anderson Company memproduksi barang di mana biaya variabelnya perunit adalah \$6 dan biaya tetapnya \$80.000. Setiap unit mempunyai harga jual \$10. Tentukan jumlah unit yang harus dijual agar perusahaan dapat meraih keuntungan sebesar \$60.000.
10. Manajemen PT Smith ingin mengetahui jumlah penjualan (dalam unit) yang diperlukan agar perusahaan mendapat keuntungan sebesar \$150.000. Data-datanya adalah sebagai berikut : harga satuan \$50, biaya variabel per unit adalah \$25, total biaya tetap \$50,000. Dari data tersebut, tentukanlah jumlah unit yang terjual. Gunakan strategi pemecahan Polya untuk menyelesaikannya.

==

Kecerdasan plus karakter...itulah tujuan pendidikan yang sejati

(Martin Luther King Jr)

==

BAB II. BILANGAN PECAHAN, BILANGAN DESIMAL DAN PERSEN

Tujuan Instruksional :

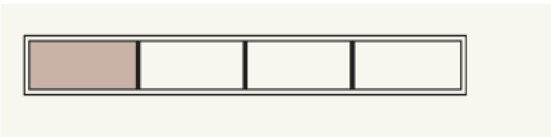
Setelah mengikuti perkuliahan dengan materi dari Bab II, diharapkan mahasiswa mampu :

- Mendefinisikan pengertian bilangan pecahan.
- Mendefinisikan pengertian desimal.
- Menyatakan kembali bilangan pecahan dalam bilangan desimal.
- Mendefiniskan pengertian persen.
- Menyatakan kembali persen dalam bilangan desimal.
- Menyelesaikan masalah bisnis operasional dengan menggunakan pecahan, desimal dan persen.

Dalam Bab II ini akan dibahas secara khusus bagian dari bilangan Real, yaitu bilangan pecahan. Kemudian akan dibahas pula penulisan bilangan pecahan secara desimal, dan pengertian dari Persen. Bab 2 ini dapat digunakan selama 2 pertemuan masing-masing 3 sks, yaitu sesuai dengan RPS Matematika Bisnis, di pertemuan 3 dan 4 di mana pertemuan 3 pembahasan mengenai teori dan beberapa latihan, dan pertemuan 4 diisi dengan latihan soal dalam dunia bisnis untuk memumpuk ketrampilan pemecahan masalah pada mahasiswa.

2.1. Bilangan Pecahan

Bilangan pecahan adalah bilangan yang digunakan untuk menyatakan bagian dari bilangan bulat. Sebagai contoh, jika satu bagian utuh dibagi menjadi 4 bagian yang sama, maka bagian kecil tadi akan dikenal dengan bilangan pecahan $\frac{1}{4}$ seperti nampak pada gambar 4 :



Gambar 2.1. Satu Bagian dari Empat Bagian

Pada pecahan $\frac{1}{4}$, angka 4 melambangkan bilangan dari keseluruhan bagian, dan dinamakan sebagai denominator atau divisor, atau penyebut. Sedang bilangan 1 melambangkan bagian yang dituju pada bilangan tersebut, dan dinamakan sebagai numerator, atau dividend, atau pembilang.

Pecahan yang bernilai kurang dari 1, disebut pecahan murni, sedang pecahan yang bernilai lebih dari 1 dinamakan pecahan campuran.

Contoh 1 :

Pecahan $\frac{2}{3}$ merupakan pecahan murni, karena bernilai kurang dari 1. Jika digambarkan :

Gambar 2.2. Pecahan $\frac{2}{3}$

Contoh 2 :

Pecahan $\frac{5}{3}$ merupakan pecahan campuran, karena nilainya lebih dari 1. Jika digambarkan:

Gambar 2.3. Pecahan $\frac{5}{3}$

Tuliskan definisimu sendiri tentang bilangan pecahan murni dan bilangan pecahan campuran

2.1.1. Menyatakan Pecahan Campuran Menjadi Bilangan Bulat Dan Pecahan Murni

Kita perhatikan gambar 2.2 yang terdiri atas 1 bagian utuh dan 2 bagian dari 3 bagian utuh. Pecahan pada gambar 2.3 merupakan pecahan campuran, dan dari gambar dapat terlihat bahwa pecahan $\frac{5}{3}$ dapat ditulis sebagai $1\frac{2}{3}$.

Bagaimana kita mengubah pecahan campuran menjadi bilangan bulat dan pecahan murni? Ikuti langkah-langkah dan contoh di bawah ini :

Contoh 1 : Tulislah $\frac{13}{3}$ sebagai bilangan bulat dan bilangan pecahan murni.

Tabel 2.1. Langkah dan Contoh Mengubah Pecahan Campuran

Langkah	Contoh Penyelesaian
1. Bagilah angka pada pembilang dengan angka pada penyebut.	Bilangan 13 dibagi dengan 3 , hasilnya adalah 4 sisa 1.
2. Jika sisanya 0, maka pecahan tersebut merupakan bilangan bulat. Jadi pecahan campuran tersebut adalah bilangan bulat.	
3. Jika sisanya bukan 0, maka pecahan tersebut bukan merupakan bilangan bulat. Pecahan campuran tersebut pasti terdiri dari bilangan bulat dan pecahan murni, di mana pembilang dari pecahan murni nya adalah hasil dari sisa pembagian, dan pembilangnya adalah penyebutnya.	$\frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$ hasil dari sisa pembagian pembagi bilangan bulat dari hasil bagi

Contoh 2: Tulislah $\frac{139}{8}$ sebagai bilangan bulat dan bilangan pecahan murni.

Tabel 2.2. Langkah dan Contoh Mengubah Pecahan Campuran

Langkah	Contoh Penyelesaian
1. Bagilah angka pada pembilang dengan angka pada penyebut.	Bilangan 139 dibagi dengan 8 , hasilnya adalah 17 sisa 3.
2. Jika sisanya 0, maka pecahan tersebut merupakan bilangan bulat. Jadi pecahan campuran tersebut adalah bilangan bulat.	
3. Jika sisanya bukan 0, maka pecahan tersebut bukan merupakan bilangan bulat. Pecahan campuran tersebut pasti terdiri dari bilangan bulat dan pecahan murni, di mana pembilang dari pecahan murni nya adalah hasil dari sisa pembagian, dan pembilangnya adalah	$\frac{139}{8} = 17\frac{3}{8}$

Langkah	Contoh Penyelesaian
penyebutnya.	

Contoh 3 : Tulislah $\frac{25}{5}$ sebagai bilangan bulat dan bilangan pecahan murni.

Tabel 2. 3. Langkah dan Contoh Mengubah Pecahan Campuran

Langkah	Contoh Penyelesaian
1. Bagilah angka pada pembilang dengan angka pada penyebut.	Bilangan 25 dibagi dengan 5 , hasilnya adalah 0.
2. Jika sisanya 0, maka pecahan tersebut merupakan bilangan bulat. Jadi pecahan campuran tersebut adalah bilangan bulat.	Jadi $\frac{25}{5} = 5$

2.1.2. Menyatakan Bilangan Bulat Dan Pecahan Murni Menjadi Pecahan Campuran

Sekarang akan dipelajari bagaimana menyatakan suatu bilangan yang terdiri atas bilangan bulat dan pecahan murni menjadi pecahan campuran. Hal ini sering diperlukan, karena untuk memeriksa apakah jawaban sudah benar. Secara prinsip, sebenarnya langkah yang dilakukan hampir sama dengan sub bab 2, hanya merupakan balikannya.

Perhatikan langkah dan contoh berikut ini :

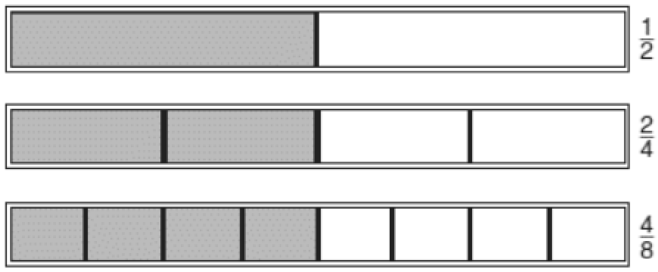
Contoh 1: Tulislah $17\frac{3}{8}$ sebagai pecahan campuran

Tabel 2.4. Langkah dan Contoh Mengubah Pecahan Campuran

Langkah	Contoh Penyelesaian
1. Kalikan bilangan bulat dengan penyebut dari pecahan campuran tersebut.	17 x 8 = 136
2. Tambahkan hasil pada langkah 1 dengan bilangan pembilang pada pecahan murninya.	136 + 3 = 139
3. Pecahan campurannya adalah bilangan dari hasil pada langkah 2 sebagai pembilang dan penyebutnya tetap pada penyebut dari pecahan murninya.	$17\frac{3}{8} = \frac{139}{8}$

2.1.3. Menuliskan Bilangan Pecahan dalam Bentuk Paling Sederhana

Perhatikan Gambar 2.4 :



Gambar 2.4. Pecahan yang Mempunyai Nilai Sama

Dari Gambar 2.4 dapat dilihat bahwa nilai dari ketiga pecahan tersebut adalah sama, atau dapat ditulis : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$. Dalam hal ini, dapat dikatakan bahwa pecahan $\frac{1}{2}$ merupakan bentuk paling sederhana dari pecahan $\frac{4}{8}$.

Bagaimana membentuk pecahan paling sederhana dari suatu pecahan?. Ikutilah langkah langkah dan contoh di bawah ini :

Contoh 1:

Tulislah $\frac{8}{10}$ sebagai pecahan paling sederhana

Tabel 2.5. Langkah dan Contoh Menuliskan Pecahan dalam Bentuk Paling Sederhana

Langkah	Contoh Penyelesaian
1. Carilah pembagi dari pembilang dan penyebut (yaitu suatu bilangan, yang jika dibagikan pada pembilang dan penyebut, tidak menghasilkan sisa) .	Pembagi dari bilangan 8 dan 10 adalah 2
2. Bagilah pecahan tersebut dengan pembaginya	$\frac{8}{10} : \frac{2}{2} = \frac{4}{5}$
3. Periksalah apakah ada pembagi lain dari pecahan baru. Jika ada, bagilah lagi dengan pembagi tersebut, jika tidak, maka pecahan baru tadi sudah merupakan pecahan paling sederhana	$\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

Contoh 2:

Tulislah $\frac{30}{36}$ sebagai pecahan paling sederhana

Tabel 2.6. Langkah dan Contoh Menuliskan Pecahan dalam Bentuk Paling Sederhana

Langkah	Contoh Penyelesaian
1. Carilah pembagi dari pembilang dan penyebut (yaitu suatu bilangan, yang jika dibagikan pada pembilang dan penyebut, tidak menghasilkan sisa) .	Pembagi dari bilangan 30 dan 36 adalah 2
2. Bagilah pecahan tersebut dengan pembaginya	$\frac{30}{36} : \frac{2}{2} = \frac{15}{18}$
3. Periksalah apakah ada pembagi lain dari pecahan baru. Jika ada, bagilah lagi dengan pembagi tersebut, jika tidak, maka pecahan baru tadi sudah merupakan pecahan paling sederhana.	Pembagi dari bilangan 15 dan 18 adalah 3, sehingga $\frac{15}{18} : \frac{3}{3} = \frac{5}{6}$ Karena tidak ada pembagi lain pada bilangan 5 dan 6, maka $\frac{5}{6}$ adalah bilangan pecahan paling sederhana dari $\frac{30}{36}$

Contoh 3:

Tulislah $1\frac{12}{15}$ sebagai pecahan paling sederhana

Tabel 2.7. Langkah dan Contoh Menuliskan Pecahan dalam Bentuk Paling Sederhana

Langkah	**Contoh Penyelesaian**
1. Carilah pembagi dari pembilang dan penyebut (yaitu suatu bilangan, yang jika dibagikan pada pembilang dan penyebut, tidak menghasilkan sisa) .	Jika merupakan pecahan yang terdiri dari bilangan bulat dan pecahan, maka perhatikan hanya pada bilangan pecahan saja. Pembagi dari bilangan 12 dan 15 adalah 3
2. Bagilah pecahan tersebut dengan pembaginya	$\frac{12}{15} : \frac{3}{3} = \frac{4}{5}$
3. Periksalah apakah ada pembagi lain dari pecahan baru. Jika ada, bagilah lagi dengan pembagi tersebut, jika tidak, maka pecahan	Sehingga bentuk paling sederhana dari $1\frac{12}{15}$ adalah $1\frac{4}{5}$

Langkah	Contoh Penyelesaian
baru tadi sudah merupakan pecahan paling sederhana.	

Contoh 4 :

Data menunjukkan bahwa pada setiap 1.000 orang di kota Surabaya, terdapat 932 pemilik telepon genggam. Tuliskan pecahan yang menyatakan kepemilikan telepon genggam penduduk Surabaya dalam bentuk paling sederhana.

Jawab :

Kepemilikan telepon genggam penduduk Surabaya adalah $\frac{932}{1.000}$. Bentuk paling sederhana adalah $\frac{233}{250}$.

2.1.4. Operasi Pada Bilangan Pecahan

Sekarang akan dibahas bagaimana mengoperasikan (menjumlah, mengurang, mengali, membagi) pada bilangan pecahan, maupun antara bilangan pecahan dan bilangan bulat.

2.1.4.1. Penjumlahan atau Pengurangan Bilangan Pecahan.

Jika penyebut dari dua pecahan tersebut sama, maka tambahankan/kurangkan pembilangnya, dan penyebutnya tetap.

Contoh 1 : Tentukan $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{1+3+4}{4} = \frac{8}{4} = 2$

Jawab : Jika penyebut dari dua pecahan tersebut berbeda, maka penyebut harus disamakan terlebih dahulu.

Contoh 2: Tentukan $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{5}{12}$

Jawab : $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{5}{12} = \frac{6}{24} + \frac{9}{24} + \frac{10}{24} = \frac{25}{24} = 1\frac{1}{24}$

Contoh 3 : Tentukan $2\frac{1}{4} + 5\frac{3}{8} - \frac{5}{4}$

Jawab : $2\frac{1}{4} + 5\frac{3}{8} - \frac{5}{4} = \frac{9}{4} + \frac{43}{8} - \frac{5}{4} = \frac{18+43-10}{8} = \frac{51}{8} = 6\frac{3}{8}$

Contoh 4 : Tentukan $10\frac{1}{3} - 7\frac{3}{5} - \frac{5}{4}$

Jawab : $10\frac{1}{3} - 7\frac{3}{5} - \frac{5}{4} = \frac{31}{3} - \frac{38}{5} - \frac{5}{4} = \frac{610}{60} - \frac{456}{60} - \frac{75}{60} = \frac{79}{60} = 1\frac{19}{60}$

Contoh 5 : Markus, seorang tuan tanah, mempunyai 100 ha tanah, yang akan diberikan kepada ketiga anaknya. Anak pertama diberi $23\frac{2}{3}$ ha, anak kedua diberi $12\frac{3}{4}$ ha, dan anak ketiga diberi $5\frac{1}{8}$ ha. Berapa sisa tanah yang ada?.

Jawab : Sisa tanah yang ada = $100 - 23\frac{2}{3} - 12\frac{3}{4} - 5\frac{1}{8} = 100 - \frac{71}{3} - \frac{51}{4} - \frac{41}{8} = \frac{2.400}{24} - \frac{568}{24} - \frac{306}{24} - \frac{123}{24} = \frac{1403}{24} = 58\frac{11}{24}$. Jadi sisa tanah yang ada adalah $58\frac{11}{24}$ ha.

2.1.4.2. Perkalian Bilangan Pecahan.

Bilangan pecahan yang akan dikalikan, harus diubah dulu menjadi pecahan murni atau pecahan campuran, jadi tidak boleh masih dalam bentuk bilangan bulat dan pecahan.

Setelah dalam bentuk pecahan murni atau campuran, maka kalikan penyebut dengan penyebut, dan pembilang dengan pembilang. Akan lebih baik jika mengalikan sudah dalam bentuk paling sederhana.

Contoh 1 : Tentukan $\frac{1}{4}$ x $\frac{3}{5}$

Jawab : $\frac{1}{4}$ x $\frac{3}{5} = \frac{3}{20}$

Contoh 2 : Tentukan $2\frac{1}{3}$ x $3\frac{3}{4}$

Jawab :

$$
\begin{aligned}
2\frac{1}{3} \times 3\frac{3}{4} &= \frac{(3 \times 2) + 1}{3} \times \frac{(4 \times 3) + 3}{4} \\
&= \frac{7}{\cancelto{1}{3}} \times \frac{\cancelto{5}{15}}{4} \\
&= \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

(Perhatikan bahwa antara bilangan 3 dan bilangan 15 dapat disederhanakan terlebih dahulu menjadi 1 dan 5)

Contoh 3 : Tiga buah restoran masing-masing mendapat jatah keju sebanyak $\frac{9}{10}$ kwintal setiap bulannya untuk kebutuhan aneka resep. Berapa kwintal keju diperlukan setiap bulannya untuk memenuhi seluruh restoran itu?

Jawab : Banyaknya keju yang diperlukan untuk seluruh restoran adalah = 3 x $\frac{9}{10}$ $= \frac{27}{10} = 2\ \frac{7}{10}$

2.1.4.3. Pembagian Bilangan Pecahan

Pembagian bilangan pecahan dilakukan dengan mengalikan bilangan yang dibagi dengan bilangan *reciprocal* dari bilangan pembaginya.

Bilangan *reciprocal* adalah suatu bilangan di mana jika dikalikan dengan bilangan tersebut, hasilnya adalah 1. Sebagai contoh bilangan *reciprocal* dari $\frac{9}{10}$ adalah $\frac{10}{9}$, karena $\frac{9}{10} \times \frac{10}{9} = 1$.

Contoh 1 : Tentukan $\frac{3}{4} : \frac{9}{10}$

Jawab : $\frac{3}{4} : \frac{9}{10} = \frac{3}{4} \times \frac{10}{9} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$

Contoh 2 : Tentukan $2 : \frac{5}{6}$

Jawab : $2 : \frac{5}{6} = 2 \times \frac{6}{5} = \frac{12}{5}$

Contoh 3 : Tentukan $\frac{5}{6} : 2$

Jawab : $\frac{5}{6} : 2 = \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$

Contoh 4 : Tiga buah restoran mendapat jatah keju sebanyak $\frac{9}{10}$ kwintal setiap bulannya untuk kebutuhan aneka resep. Berapa kg keju diperlukan setiap bulannya untuk masing-masing restora itu jika jatah keju dibagi rata pada setiap restoran?

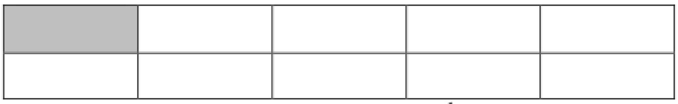
<u>Jawab :</u> 3 restoran mendapat jatah keju sebanyak $\frac{9}{10}$ kwintal untuk dibagi rata pada setiap restorannya. Ini berarti setiap restorannya akan mendapat jatah keju sebanyak $\frac{9}{10} : 3 =$

$\frac{9}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$ kwintal. Karena 1 kwintal = 100 kg, maka jumlah keju yang didapat adalah : $\frac{3}{10} \times 100$ kg = 30 kg.

2.2. Desimal

Mata uang dollar yang banyak dipakai di dunia bisnis, menggunakan desimal selain bilangan bulat, misalnya $ 23,45. Oleh karenanya sangat penting memahami peran desimal selain bilangan pecahan. Setiap bilangan pecahan dapat ditulis dalam bilangan desimal, dan sebaliknya.

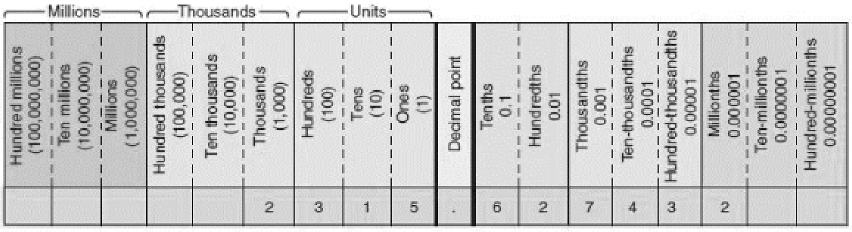
Misalnya pecahan $\frac{1}{10}$ yang dapat digambarkan sebagai



Gambar 2.5. Pecahan $\frac{1}{10}$

Sedang secara desimal ditulis sebagai 0.1

Nilai tempat untuk bilangan desimal adalah :



Gambar 2.6. Nilai Tempat untuk Desimal

2.2.1. Konversi Bilangan Pecahan Ke Bilangan Desimal Dan Sebaliknya

Kita dapat menuliskan bilangan pecahan menjadi bilangan desimal, dengan cara mengalikan pecahannya dengan bilangan 10, jika penyebutnya hanya 1 digit, atau mengalikan pecahannya dengan bilangan 100 jika penyebutnya 2 digit, atau mengalikan pecahannya dengan bilangan 1000 dan seterusnya.

Contoh 1 : Konversikan bilangan $4\,\frac{1}{5}$ menjadi bilangan desimal

Jawab : karena penyebutnya hanya terdiri 1 digit, maka kita kalikan dengan 10, sehingga

$\frac{1}{5}$ x 10 = 2. Oleh karenanya $4\,\frac{1}{5} = 4,2$

Contoh 2 : Konversikan bilangan $4\,\frac{2}{25}$ menjadi bilangan desimal

Jawab : karena penyebut pada bilangan pecahannya terdiri 2 digit, maka kita kalikan dengan 100, sehingga $\frac{2}{25}$ x 100 =8. Oleh karenanya $4\,\frac{2}{25} = 4,08$

Contoh 3 : Konversikan bilangan $4\,\frac{12}{25}$ menjadi bilangan desimal

Jawab : karena penyebut pada bilangan pecahannya terdiri 2 digit, maka kita kalikan dengan 100, sehingga $\frac{12}{25}$ x 100 =48. Oleh karenanya 4 $\frac{2}{25}$ = 4, 48

2.2.2. Konversi Bilangan Desimal Ke Bilangan Pecahan Dan Sebaliknya

Untuk menuliskan bilangan desimal menjadi bilangan pecahan, maka yang dilakukan adalah mengubah bilangan di belakang koma menjadi pecahan, dengan cara : jika terdiri atas 1 angka di belakang koma, maka bilangan tersebut dibagi 10, jika terdiri atas 2 angka di belakang koma, maka bilangan tersebut dibagi 100, jika terdiri atas 3 angka di belakang koma, maka bilangan tersebut dibagi 1.000, dan seterusnya

Contoh 1 : Konversikan 3,4 menjadi bilangan pecahan campuran

Jawab : Karena hanya ada 1 angka di belakang koma, maka bilangan tersebut dibagi 10, sehingga menjadi $\frac{4}{10}$ atau jika disederhanakan menjadi $\frac{2}{5}$. Jadi 3,4 = $3\frac{2}{5}$ atau 3,4 = $\frac{17}{5}$.

Contoh 2 : Konversikan 4,35 menjadi bilangan bulat dan pecahan murni.

Jawab : Karena terdapat 2 bilangan di belakang koma, maka bilangan tersebut dibagi 100, sehingga menjadi $\frac{35}{100} = \frac{7}{20}$. Sehingga 4,35 = 4 $\frac{7}{20}$.

2.2.3. Operasi Pada Bilangan Desimal

Sekarang akan dibahas bagaimana cara mengoperasikan bilangan desimal, yaitu menjumlahkan, mengurangkan, mengalikan dan membagikan.

2.2.3.1. Menjumlahkan/Mengurangkan Bilangan Desimal

Penjumlahan/pengurangan bilangan desimal, pada prinsipnya hampir sama dengan penjumlahan/pengurangan bilangan bulat. Harus diperhatikan dengan benar adalah letak dari nilai tempatnya. Artinya, setiap bilangan harus diletakkan sesuai dengan nilai tempatnya, kemudian jumlahkan sesuai dengan nilai tempatnya.

Contoh 1 : Tentukan 3,45 + 24,56 + 132,127

Jawab : 3,45

24,56

132,127 +

160,137

Contoh 2 : Tentukan 132,28 – 2,3

<u>Jawab :</u> 132,28

2,3 -

129.98

Contoh 3 : Anisa membeli buku seharga \$23,45 dan membayar dengan uang sebesar \$30. Berapa uang kembalian Anisa?.

<u>Jawab</u> : Uang kembalian Anisa adalah 30 – 23,45 = \$ 6,55.

2.2.3.2. Perkalian Bilangan Desimal

Langkah-langkah yang harus dilakukan untuk perkalian bilangan desimal :

(1) Anggap bilangan desimal yang hendak dikalikan sebagai bilangan bulat.

(2) Kalikan seperti ketika mengalikan bilangan bulat

(3) Setelah didapat hasilnya, hitung masing-masing jumlah digit di belakang koma dari bilangan desimal yang dikalikan, kemudian jumlahkan

(4) Beri tanda koma pada bilangan yang didapat pada langkah (2), mulai dari kanan, sejumlah banyaknya koma yang didapat dari langkah (3)

Contoh 1 : Tentukan 3.5 x 0.3

<u>Jawab :</u> 3.5

0.3 x

1.05 (terdiri atas 2 digit di belakang koma, karena masing-masing terdiri atas 1 digit)

Contoh 2 : Tentukan 2.35 x 0.015

<u>Jawab :</u>

$$\begin{array}{r} 2.35 \\ \times\ 0.015 \\ \hline 1175 \\ 235 \\ \hline 0.03525 \end{array}$$

Contoh 3 : Ani mengadakan pesta ulang tahun di restoran mewah dengan mengundang 32 teman-temannya. Per orang, Ani harus membayar \$ 30,05. Berapa keseluruhan yang harus dibayar Ani?

Jawab : Yang harus dibayar Ani adalah 32 x $ 30,05 = $ 961.6

2.2.3.3. Pembagian Bilangan Desimal

Pembagian bilangan desimal merupakan hal yang penting pada dunia bisnis, misalnya digunakan untuk menghitung harga per item, jika diketahui harga keseluruhan, atau untuk menentukan harga jual eceran setelah diketahui harga beli per grosir, dan lain-lain.

Contoh 1 : Tentukan 5.95 : 17

Jawab :

```
     0.35
17)5.95
   5 1
     85
     85
      0
```

Jadi : 5.95 : 17 = 0.35

Contoh 2 : Tentukan 37.4 : 24

Jawab :

```
      1.558
24)37.400
   24
   13 4
   12 0
    1 40
    1 20
     200
     192
       8
```

Jadi 37.4 : 24 = 1.558

Contoh 3 : Tentukan 59.9 : 0.39

Jawab : Apabila kedua bilangan adalah bilangan desimal, maka akan lebih mudah jika kedua bilangan dikalikan 10, atau 100, atau 1.000 terlebih dahulu agar keduanya menjadi bilangan bulat.

Jadi, 59.9 : 0.39 = 5990 : 39 = 153.589.

Contoh 4 : Tentukan 24 : 0.39

Jawab : Hampir sama dengan contoh 35, maka pengerjaan akan lebih mudah jika kedua bilangan dikalikan dengan 100, sehingga menjadi 2400 : 39 = 61.5384

Contoh 5: Bu Suti sedang membandingkan harga roti di dua toko yang berbeda. Harga roti di toko A adalah $2.49 untuk 12 potong roti, sedang harga roti yang sama, di toko B adalah $3.99 untuk 16 potong roti. Toko manakah yang lebih murah? Berapa selisihnya?

Jawab :

Di toko A, harga 12 potong roti adalah $2.49, ini berarti satu potong roti seharga :

2.49 : 12 = $0.2075

Di toko B, harga 16 potong roti adalah $3.29, ini berarti satu potong roti seharga :

3.29 : 16 = $0.2056

Jadi harga roti di toko B lebih murah daripada di toko A, dengan selisih harga :

$0.2075 - $0.2056= $0.19

Contoh 6 :

Ibu memiliki persediaan beras di rumah sebanyak 2,5kg. Ibu membeli lagi beras sebanyak 6,8kg. Setelah di masak sebanyak 6 kali masing-masing dua per tiga kilogram setiap masak, berapa sisa persediaan beras Ibu ?

Jawab :

Persediaan beras semula = 2.5 kg, kemudian membeli lagi sebanyak 6.8 kg, sehingga jumlah persediaan beras ibu = 2.5 + 6.8 = 9.3 kg

Ibu memasak 6 kali masing-masing dua per tiga kilogram, sehingga jumlah beras yang dimasak ibu adalah = 6 x $\frac{2}{3}$ kg = 4 kg.

Sisa persediaan beras ibu adalah 9.3 kg – 4 kg = 5.3 kg

Contoh 7 :

Ayu seorang pedagang membeli gula pasir sebanyak 50 kg. Gula pasir tersebut akan dijual secara eceran. Jika Ayu akan menjualnya dengan dimasukkan ke dalam kantong plastik dengan berat masing-masing 1,25kg. Maka berapa banyak kantong plastik yang diperlukan untuk membungkus gula sampai habis ?

Jawab :

Banyaknya kantong plastik yang diperlukan untuk membungkus gula sampai habis adalah :

50 : 1.25 = 40 kantong plastik.

Contoh 8 :

Marti membagi sejumlah beras dalam tiga kantung plastik. Kantung pertama beratnya 0,75 kg, kantung kedua 0,8 kg, dan kantung ketiga 0,3 kg. Berapa kilogram beras yang dibagikan oleh Marti?

Jawab :

Beras yang dibagikan oleh Marti adalah = 0.75 +0.8 +0.3 kg = 1.85 kg

Contoh 9 :

Mula-mula pak Amir membeli 0,375 kg pupuk. Ia membeli lagi 0,25 kg. Karena masih kurang, ia membeli lagi 0,7 kg. Berapa kilogram jumlah pupuk yang dibeli pak Amir?

Jawab :

Jumlah pupuk yang dibeli oleh pak Amir = 0.375 + 0.25 + 0.7 = 1,325 kg.

Contoh 10 :

Ada sebuah gelas yang isinya 400 ml air, lalu ditambahkan lagi dengan 40 ml air. Berapa total persen kenaikan volume air ?

Jawab :

Persen kenaikan volume air adalah

(40 ml/400 ml) x 100 = 10%

Contoh 11 :

Sebuah baju berharga Rp. 50.000 lalu baju itu ada diskon 10%, bagaimana mencari 10% dari 50.000, dan berapa harga sebetulnya dari baju itu ?

Jawab :

Cara I

Nilai persen = [Nilai Persen] x [100] x [Nilai Pecahan]

10 : 100 × 40.000 = 0.1 x 50.000 = 5.000

Cara II

Nilai persen = [Nilai Persen] x [Nilai Pecahan] : [100]

10 × 50.000/100 = 5.000

Maka harga baju = 50.000 – 5000 = 45,000

Contoh 12 :

Angga memiliki sebuah pinjaman di bank 120,000,000 dengan angsuran perbulan 4,730,000 per tiap bulan selama 47 kali, berapakah persen angsuran tiap bulannya?

Jawab :

Pinjaman 120.000.000

Angsuran 4.730.000/bln x 47= 222.310.000

% = 120.000.000/222.310.000 x 100

% = 53.97

Atau

Pinjaman 120.000.000 / 47 = 2.553.191

Angsuran 4.730.000

% = 2.553.191/4.730.000 x 100

% = 53,97

Contoh 13 :

Angga hendak membeli satu buah bunga dari kertas seharga Rp 125.000 lantaran ketika waktu itu lagi bertepatan pada perayaan tahun baru. Jadinya, bunga itu memperoleh diskon sebesar 40%. Berapa total biaya yang patut di bayar oleh Angga agar bisa membeli bunga dari kertas tersebut tersebut ?

Jawab :

Diketahui :

Harga mula-mula = Rp. 200.000

Harga diskon = harga mula-mula x persentase diskon

Harga diskon = Rp. 200.000 x 40%

Harga diskon = Rp. 200.000 x 40/100

Harga diskon = Rp. 80.000

Ditanyakan:

Harga akhir = … ?

Harga akhir = harga mula– harga diskon

Harga akhir = Rp. 200.000 – Rp. 80.000

Harga akhir = Rp. 120.000

Maka total biaya yang mesti dibayar Budi agar bisa membeli tas itu ialah Rp. 120.000

Contoh 14 :

Ibu Rahma hendak membeli satu buah Lemari baru, sesudah memilih Lemari yang ia mau, Ibu Rahma kemudian mendatangi si kasir buat membayar lemari tersebut. Seusai dikasih potongan harga dengan jumlah 40% harga lemari tersebut jadi Rp. 650.000. Hitunglah berapa harga awal dari lemari tersebut sebelum dikasih diskon.

Jawab :

Diketahui :

Harga akhir = Rp. 650.000

persentase diskon = 50 %

Ditanyakan:

Harga mula-mula = …?

Pakai Logika perbandingan :

X% +Y% = Z %

50% + 50 % = 100 %

Rp X + Rp 650,000 = Rp Z

(Rp 650.000 x 50%) : 50 % = Rp 650,000

Maka Harga mula-mula ialah Rp 650,000 + Rp 650,000 = Rp 1,300,000

Maka harga mula-mula dari kulkas tersebut sebelum dipotong diskon ialah Rp 1,300,000

2.3. Persen

Persen adalah sebuah standard untuk mengekspresikan bagian dari sebuah objek yang secara keseluruhan/utuh dianggap sebagai 100. Jadi, jika suatu objek dinyatakan sebagai 25%, maka ini berarti objek tersebut merupakan $\frac{25}{100}$ bagian dari keseluruhan, atau $\frac{1}{4}$ bagian.

Simbol dari persen adalah %.

2.3.1. Konversi Dari Bilangan Bulat, Pecahan Dan Desimal Ke Dalam Persen.

Mengubah bilangan bulat, pecahan dan desimal ke dalam bentuk persen, dapat dilakukan dengan cara mengalikan bilangan tersebut dengan 100.

Contoh 1 : Konversikan bilangan bulat di bawah ini ke dalam bentuk persen :

a. 1

b. 3

Jawab :

a. 1 x 100% = 100%

b. 3 x 100% = 300%

Contoh 2 : Konversikan bilangan pecahan di bawah ini ke dalam bentuk persen :

a. $\frac{1}{4}$

b. $\frac{2}{5}$

c. $\frac{2}{3}$

Jawab :

a. $\frac{1}{4}$ x 100% = 25%

b. $\frac{2}{5}$ x 100% = 40%

c. $\frac{2}{3}$ x 100% = 66, 67%

Contoh 3 : Konversikan bilangan desimal di bawah ini ke dalam bentuk persen :

a. 0,25

b. 0,35

c. 1,23

Jawab :

a. 0,25 x 100% = 25%

b. 0,35 x 100% = 35%

c. 1,23 x 100% = 123%

Contoh 4 : Dari sebuah survey yang dilakukan di kabupaten Bondowoso, diketahui bahwa penduduk yang berusia kurang dari 18 tahun adalah 0,273. Berapa persen kah penduduk yang berusia kurang dari 18 tahun?

Jawab : Jumlah penduduk yang berusia kurang dari 18 tahun adalah 0.273 x 100% = 27,3 %

2.3.2. Konversi Dari Persen ke Bilangan Bulat, Pecahan Dan Desimal.

Untuk mengubah bilangan dari persen ke bilangan bulat, pecahan atau desimal, maka dapat dilakukan dengan membagi dengan bilangan 100

Contoh 1 : Nyatakan 25% ke dalam bilangan : a) pecahan b) desimal

Jawab : a. $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

b. $25\% = \frac{25}{100} = 0{,}25$

Contoh 2 : Nyatakan $2\frac{19}{20}$ % ke dalam bilangan : a) pecahan b) desimal

Jawab : a. $2\frac{19}{20}\ \% = \frac{2\frac{19}{20}}{100} = \frac{\frac{59}{20}}{100} = \frac{59}{2.000}$

b. $2\frac{19}{20}\ \% = \frac{2\frac{19}{20}}{100} = 0.0295$

Contoh 3 : Hasil dari sebuah survey di sebuah Sekolah Menengah Atas menunjukkan bahwa hanya 0,5 % dari seluruh siswa mempunyai kebiasaan makan pagi. Nyatakan dalam bentuk pecahan dan desimal

Jawab : a. 0,5% dalam bentuk pecahan adalah $\frac{0{,}5}{100} = \frac{1}{200}$

b. 0,5% dalam bentuk desimal adalah $\frac{0{,}5}{100} = 0{,}005$

2.4. Contoh Soal dan Penyelesaian

2.4.1. Bilangan Pecahan

Contoh Soal 1 : Dari 1000 orang penduduk di suatu kota, didapat data bahwa 1.500 kg beras perhari telah dikonsumsi oleh penduduk kota tersebut. Nyatakan beras yang telah dikonsumsi oleh penduduk di kota tersebut dalam pecahan campuran serta bilangan bulat dan bilang pecahan

Jawab : 1.000 orang penduduk mengkonsumsi 1.500 kg beras, ini berarti 1 orang penduduk mengkonsumsi $\frac{1.500}{1000} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. Jadi setiap penduduk mengkonsumsi sebanyak $1\frac{1}{2}$ kg beras (dalam bentuk bilangan bulat dan campuran), atau $\frac{3}{2}$ kg beras (dalam bentuk bilangan campuran).

Contoh Soal 2 : (Cleaves, Margie, & Jeffrey, 2012) Dalam laporan tahunannya, Game Stop melaporkan bahwa pada tahun 2016 perusahaan tersebut berhasil mendapatkan laba sebesar Rp 40.000.000,-dari total pendapatan sebesar Rp 900.000.000,-. Tuliskan perbadingan antara laba dan total pendapatan dalam bentuk pecahan murni yang paling sederhana.
Jawab : Perbandingan antara laba dan total pendapatan adalah $\frac{40.000.000}{900.000.000} = \frac{2}{45}$

Contoh soal 3 : (Cleaves, Margie, & Jeffrey, 2012) Seorang pekerja melakukan lembur di hari Senin selama $1\frac{3}{4}$ jam, Selasa selama $2\frac{1}{2}$ jam, Rabu selama $1\frac{1}{4}$ jam, Kamis selama $2\ \frac{1}{4}$ jam, dan Jumat selama $1\frac{3}{4}$ jam. Berapa jumlah jam lembur pekerja tersebut dalam seminggu?
Jawab : Jumlah jam lembur pekerja dalam seminggu =

$$1\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} + 2\ \frac{1}{4} + 1\ \frac{3}{4}$$
$$= \frac{7}{4} + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{4} + \frac{7}{4}$$
$$= \frac{7}{4} + \frac{10}{4} + \frac{5}{4} + \frac{9}{4} + \frac{7}{4}$$
$$= \frac{38}{4} \text{ jam} = 9\frac{1}{2} \text{ jam}$$

Contoh soal 4 : Sebuah papan kayu sepanjang 244 m dipotong menjadi papan kayu kecil sepanjang $7\frac{5}{8}$ m. Berapa papan kayu kecil yang terjadi karena pemotongan tersebut?
Jawab : Jumlah papan kayu kecil = $244 : 7\frac{5}{8} = 244 : \frac{61}{8} = 244 \text{ x } \frac{8}{61} = 32$ papan kayu kecil

Contoh soal 5 : Seorang siswa diperbolehkan mengikuti ujian akhir semester di sebuah mata kuliah, apabila hadir minimal $\frac{6}{7}$ dari 14 pertemuan yang diselenggarakan. Berapa kali siswa tersebut boleh tidak hadir?

Jawab : Siswa diperbolehkan tidak hadir sebanyak = $(1 - \frac{6}{7}) \times 14 = \frac{1}{7} \times 14 = 2$ kali pertemuan

Contoh soal 6 : Ani bekerja pada hari Senin sejumlah $7\frac{3}{4}$ jam, di hari Selasa $5\frac{1}{2}$ jam, di hari Rabu $6\frac{1}{4}$ jam, hari Kamis $9\frac{1}{4}$ jam, dan hari Jumat $8\frac{3}{4}$ jam. Ana bekerja 40 jam dari hari Senin sampai Jumat. Siapa yang bekerja lebih lama? Berapa selisihnya?

Jawab : Jumlah jam kerja Ani dari Senin sampai Jumat adalah :

$$7\frac{3}{4} + 5\frac{1}{2} + 6\frac{1}{4} + 9\frac{1}{4} + 8\frac{3}{4}$$
$$= \frac{31}{4} + \frac{11}{2} + \frac{25}{4} + \frac{37}{4} + \frac{35}{4}$$
$$= \frac{31}{4} + \frac{22}{4} + \frac{25}{4} + \frac{37}{4} + \frac{35}{4}$$
$$= \frac{150}{4} = 37\frac{1}{2} \text{ jam}$$

Jumlah jam kerja Ana adalah 40 jam, jadi Ana bekerja lebih lama daripada Ani.

Selisih jumlah jam kerja Ana dan Ani adalah = 40 jam - $37\frac{1}{2}$ jam = $2\frac{1}{2}$ jam.

Contoh soal 7 : Tumpukan kayu lapis yang masing-masing mempunyai tebal $1\frac{5}{8}$ inci, jika ditumpuk berketebalan 91 inci. Berapa banyak potongan kayu lapis yang ada di tumpukan?

Jawab : Banyaknya potongan kayu lapis yang ada di tumpukan adalah :

$$91 : 1\frac{5}{8} = 91 : \frac{13}{8} = 91 \times \frac{8}{13} = 56 \text{ potongan kayu lapis}$$

Contoh soal 8_: Sebuah ruangan berukuran lebar $25\frac{1}{2}$ m dan panjang $32\frac{3}{4}$ m. Berapa biaya yang diperlukan untuk menutup ruangan tersebut dengan karpet, apabila biaya pemasangan adalah \$12 setiap $9m^2$?

Jawab : Luas ruangan adalah $25\frac{1}{2} \times 32\frac{3}{4} = \frac{51}{2} \times \frac{131}{4} = \frac{6.681}{8} = 835\frac{1}{8}$ m2

Karena setiap 9m2 biaya adalah \$12 , maka biaya yang diperlukan adalah :

$$(835\tfrac{1}{8} : 9) \times 12 = \frac{6.681}{8} \times \frac{1}{9} \times 12 = \frac{80.172}{72} = \$\ 1.113\tfrac{1}{2}$$

2.4.2. Bilangan Desimal

Contoh soal 1 : Pada minggu ini, Santo mendapat gaji $716.32, di mana gaji setiap jam nya adalah $19.36. Berapa jam pada minggu itu Santo bekerja?

Jawab : Jumlah jam Santo bekerja adalah : $716.32 : $19.36 = 37 jam

Contoh soal 2 : Denver Post melaporkan bahwa Wal-Mart akan menjual televisi plasma Hitachi 42 inci dalam 4 hari spesial online dengan harga masing masing $ 1,198.32. Jika Wal-Mart telah mendapatkan dana sebesar $ 637,506.24, berapa biaya unit televisi plasma Hitachi 42 inci yang terjual pada saat spesial online tersebut?

Jawab : Banyaknya unit televisi yang terjual saat spesial online adalah 637,506.4 : 1.198,32 = 532 buah televisi.

Contoh soal 3 : Koko membeli 2.000 payung seharga $ 2.46 per buah untuk dijual kembali di daerahnya. Karena mutu dan corak yang bagus, seluruh payung yang dibeli Koko terjual habis, dan Koko mendapat uang $ 6,240. Tentukan harga jual per payung, dan laba keseluruhan yang didapat oleh Koko.

Jawab : Modal yang dikeluarkan Koko = 2.000 x 2,46 = $4,920

Pendapatan yang didapat = $ 6,240

Laba = $ 6,240 - $ 4,920 = $ 1,320

Harga jual per payung : 6,240 : 2.000 = $3.12

Contoh soal 4 : Rob McNab memesan karpet 18,3 meter persegi untuk ruang tamunya, 123,5 meter persegi untuk kamar tidur, 28,7 meter persegi untuk ruang keluarga, dan 12,9 meter persegi untuk ruang bermain. Berapa jumlah karpet keseluruhan yang dipesannya?

Jawab : Jumlah karpet yang harus dipesan adalah : 18,3 +123,5 + 28.7 + 12.9 = 183.4 m2

Contoh soal 5 : Janet Morris beratnya 149,3 pon sebelum dia memulai program penurunan berat badan. Setelah delapan minggu beratnya 129,7 Pound. Berapa rata-rata berat badan Janet Morris turun dalam seminggu?

Jawab : Berat badan Janet Morris turun sebanyak 149.3 – 129.7 = 19.6 pon selama delapan minggu, sehingga per minggu berat badan Janet turun sebanyak 19.6 : 8 = 2.45 pon

Contoh soal 6 : Jika 1.000 galon bensin berharga $ 1,589, berapakah harga 45 galon bensin?

Jawab : Harga per gallon bensin adalah 1,589 : 1.000 = 1.589. Jadi 45 galon bensin harga = 45 x 1.589 = $71.505

Contoh soal 7 : Berapa rata-rata harga kain per m^2, jika harga 350m^2 kain adalah $11,043.50?

Jawab : Harga rata-rata kain per m^2 adalah $11,043.50 : 350 = $31.56

Contoh soal 8 : Stephen Lewis menjual 100 botol PepsiCola dengan harga @ $47.40, 50

botol Alcoa dengan harga @ $27.19; dan 200 paket McDonald's dengan harga @$24.72. Berapa penghasilan yang didapat oleh Stephen Lewis, jika seluruh dagangannya laku?

Jawab : Penghasilan yang didapat adalah :

Penjualan Pepsi Cola	: 100 x $47.40	= $ 4,740
Penjualan Alcoa	: 50 x $27.19	= $ 1,359.5
Penjualan Mc Donald's	: 200 x $24.72	= $ 4,944
---+		
Jumlah penghasilan yang didapat		= $ 11,043,5

2.4.3. Persen

Contoh 1 :

Selama bulan discount, 600 pelanggan diberi kesempatan untuk menggunakan kupon discount. Pada hari ini, 20% pelanggan menggunakan kupon potongan tersebut. Pemilik restoran berjanji besuk akan membagikan kupon potongan lagi, jika ada paling sedikit 100 kupon digunakan hari ini. Apakah besuk akan dibagikan kupon lagi ?

Jawab :

Hari ini, banyaknya pelanggan yang menggunakan kupon adalah :

$$20\% \text{ x } 600 = \frac{20}{100} \text{ x } 600 = \frac{1}{5} \text{ x } 600 = 120 \text{ kupon}$$

Karena kupon akan dibagikan lagi jika paling sedikit telah digunakan 100 kupon, maka kesimpulannya, besuk akan dibagikan kupon lagi, sebab hari ini ada 120 kupon yang telah digunakan.

Contoh 2 :

Jika 20 mobil telah terjual dari keseluruhan 50 mobil yang ada di sebuah show room mobil, maka berapa persentasi mobil telah terjual?

Jawab :

Persentase mobil terjual adalah $\frac{20}{50}$ x 100% = 40%

Contoh 3 :

25% dari bilangan berapakah bilangan 120 ?

Jawab :

Ini berarti 25% x bilangan = 120

Bilangan itu = $\frac{120}{25\%} = \frac{120}{\frac{25}{100}} = 120 \text{ x } \frac{100}{25} = 480$

Contoh 4 :

70% dari keseluruhan sebanyak 40 siswa kelas 4 SD pengikut tes, berhasil lulus dalam tes tersebut. Berapakah yang gagal?

Jawab :

Siswa yang lulus = 70% x 40 = 28 siswa

Siswa tidak lulus = 40 siswa – 28 siswa = 12 siswa

Contoh 5 :

Dari keseluruhan penduduk di negara A yang berjumlah 419,854,000 penduduk, 33, 588,320 penduduk diantaranya adalah sarjana. Berapa persen jumlah sarjana di negara A tersebut ?

Jawab :

Persentase jumlah sarjana adalah $\frac{33{,}588{,}320}{419{,}854{,}000}$ x 100% = 8%

Contoh 6 :

Sebuah toko jeans memberikan potongan sebesar 20% terhadap harga jeans yang dijual dengan harga $258,30. Berapa harga jeans yang harus dibayar setelah potongan tersebut?

Jawab :

Potongan yang diberikan adalah 20% atau sebesar = 20% x $258.30

= $\frac{20}{100}$ x $258.30 = $51.66

Harga yang harus dibayar = $258.30 - $51.66 = $206.64

Contoh Soal 7 :

Joe Passarelli mendapatkan upah $ 8.67 per jam bekerja di Dracken Internasional. Jika Joe memperoleh kenaikan sebesar 12%, berapa upah Joe per hari setelah kenaikan, jika Joe bekerja sehari selama 8 jam?

Jawab :

Besarnya kenaikan Joe adalah $\frac{12}{100}$ x $ 8,67 = $1,04

Upah Joe per jam setelah kenaikan = $ 8.67 + $1,04 = $9.71

Upah Joe dalam sehari = 8 x $9.71 = $77.68

Contoh Soal 8 :

Sebuah truk yang berisi es krim menjajakan dagangannya ke seluruh daerah dengan membawa 95 galon es krim. Ternyata, sopir truk dapat menjual 78% es krimnya. Berapa banyak galon es krim dapat dijual hari itu?

Jawab :

Banyaknya es krim yang dapat dijual = 78% x 95 galon = 74.1 galon

Contoh 9 :

Pada saat ulangan IPS, Jaka menghadapi 60 buah soal pilihan ganda. Ia dapat menjawab dengan benar 45 soal. Berapa persen jawaban Jaka yang benar itu?.

Jawab :

Jaka mempunyai 45 jawaban benar dari 60 soal yang tersedia.

Untuk menentukan berapa persen jawaban benar, kita perlu mengubah 45/60 ke persen, yaitu dengan cara mengalikan bilangan pecahan ini dengan 100 dan memberikan % sebagaimana yang disajikan berikut ini: 100 x $\frac{45}{60}$ % = 75 %.

Contoh 10 :

Empat puluh dua persen orang tua siswa suatu sekolah dasar adalah bekerja sebagai buruh tani. Jika banyaknya orang tua yang bekerja sebagai buruh tani tersebut 168 orang, berapa banyaknya orang tua siswa di sekolah tersebut?

Jawab :

Jaka mempunyai 45 jawaban benar dari 60 soal yang tersedia. Untuk menentukan berapa persen jawaban benar, kita perlu mengubah 45/60 ke persen, yaitu dengan cara mengalikan bilangan pecahan ini dengan 100 dan memberikan % sebagaimana yang disajikan berikut ini. = 100 x 45/60 % = 75 %.

Contoh 11 :

100 ons melon berisi 99% air. Setelah terjemur sepanjang hari sebagian air yang terkandung di dalamnya menguap dan air yang tersisa di dalam melon itu 98%. Berapa berat melon itu setelah penguapan air terjadi?

Jawab :

Berat melon 100 ons berisi 99 % air. Setelah terjadi penguapan, melon itu berisi 98% air. Kita tentukan berat melon itu setelah setelah isi airnya 98 %. Setelah menemukan banyaknya air yang menguap, kita dapat mengurangi berat asal melon (100 ons) dengan berat baru setelah terjadi penguapan. Misalkan B adalah berat air yang menguap. Dengan menggunakan strategi membuat sebuah persamaan untuk B, berat baru melon setelah penguapan adalah (100 – B) ons, dan berat air yang menguap adalah 98% dari (100 – B) ons. Berat baru dari kandungan air dapat pula dihitung dengan mengurangi banyaknya air yang hilang dari berat asal air, yaitu 99 ons. Jadi berat baru kandungan air adalah (99 – B) ons. Dengan demikian, kita mempunyai persamaan berikut:

Berat baru kandungan air = 98% berat melon setelah penguapan 99 – B = 0,98 x (100 – B) Persamaan di atas diselesaikan sebagai berikut:

99 – B = 0,98 x (100 – B)

99 – B = 98 – 0,98 B

1 = 0,02 B

B = 50

Jadi berat air itu yang hilang dikarenakan penguapan adalah 50 ons, dan dengan demikian berat melon setelah penguapan (100 – 50) ons, atau 950 ons.

Contoh 12 :

Ari membeli sebuah sepeda dan kemudian menjualnya 20% lebih banyak dari harga pembeliannya. Jika ia menjual sepeda seharga Rp. 144.000,00, berapa harga sepeda waktu Ari membelinya?

Jawab :

Kita mencari harga beli sepeda (B) yang Ari bayar. Kita tahu bahwa ia menjual sepeda seharga Rp.144.000,00 dan harga jual itu sudah termasuk 20% keuntungan. Jadi kita dapat menulis sebuah persamaan sebagai berikut: 144.000 = B + (20% x B) 144.000 = B + (0,2 x B) 144.000 = (1 + 0,2) B 144.000 = 1,02 B 144.000 : 1,02 = B 120.000 = B Jadi Ari membeli sepeda seharga Rp.120.000,00 Untuk melihat kebenaran penyelesaian di atas, kitamelakukan pemeriksaan sebagai beriku: Harga beli = Rp.120.000,000 Keuntungan = 20 % x 120.000 = 0,2 x 120.000 = Rp. 24.000,00 Jadi, harga jual = 120.000 + 24.000 = Rp. 144.000,00 Jadi, penyelesaian yang menyatakan bahwa Ari membeli sepeda seharga Rp.120.000,00 adalah benar.

Contoh 13 :

Sebuah toko pakian mencantumkan potongan harga 10 % untuk hemat Rp.15.000,00. Selanjutnya ketika Ami membeli sehelai baju manajer toko mengatakan memberi potongan harga 30% dari harga asal. Berapa rupiah potongan harga pada saat Ami membeli baju itu?

Jawab :

Potongan harga sebesar 10% untuk hemat Rp.15.000,00. Kita dapat menentukan potongan harga yang Ami terima jika kita mengetahui harga asalnya (H). Untuk menemukan H, kita menggunakan sasaran antara. Karena 10% dari H adalah

Rp.15.000,00, kita mempunyai persamaan berikut: 10% x H = 15.000 0,10 x H = 15.000 H = 15.000 x 10 = 150.000. Harga asalnya adalah Rp. 150.000,00 Ami menerima potongan harga 30 % dari harga asal. Potongan harga yang Ami terima = 30 % x 150.000 = 0,3 x 150.000 = Rp. 45.000,00

Cara lain itu dapat berupa sebuah pendekatan yang berbeda memberikan penyelesaian lebih efisien dan dapat mengkonfirmasi jawaban yang telah ditemukan itu. Cara lain yang dimaksud adalah: Jika 10% dari harga asal adalah Rp. 15.000,00, maka 30% dari harga asal adalah 3 kali Rp. 15.000,00, atau Rp. 45.000,00.

2.5. Rangkuman

1. Bilangan pecahan adalah bilangan yang digunakan untuk menyatakan bagian dari bilangan bulat.
2. Bilangan pecahan terdapat dua jenis yaitu pecahan murni dan pecahan campuran.
3. Operasi pada bilangan pecahan terdiri dari :
   - Penambahan bilangan pecahan
   - Pengurangan bilangan pecahan
   - Perkalian bilangan pecahan
   - Pembagian bilangan pecahan
   - Penyederhanaan bilangan pecahan
4. Definisi dari bilangan desimal : Mata uang dollar yang banyak dipakai di dunia bisnis, menggunakan desimal selain bilangan bulat, misalnya $ 23,45. Oleh karenanya sangat penting memahami peran desimal selain bilangan pecahan. Setiap bilangan pecahan dapat ditulis dalam bilangan desimal, dan sebaliknya.
5. Konversi bilangan pecahan ke bilangan desimal dapat dilakukan dengan cara mengalikan pecahannya dengan bilangan 10, jika penyebutnya hanya 1 digit, atau mengalikan pecahannya dengan bilangan 100 jika penyebutnya 2 digit, atau mengalikan pecahannya dengan bilangan 1000 dan seterusnya.
6. Konversi bilangan desimal ke bilangan pecahan dapat dilakukan dengan cara mengubah bilangan di belakang koma menjadi pecahan.

7. Operasi pada bilangan desimal terdiri dari :
   - Penambahan bilangan desimal
   - Pengurangan bilangan desimal
   - Perkalian bilangan desimal
   - Pembagian bilangan desimal
   - Penyederhanaan bilangan desimal
8. Persen adalah sebuah standard untuk mengekspresikan bagian dari sebuah objek yang secara keseluruhan/utuh dianggap sebagai 100.
9. Mengubah bilangan bulat, pecahan dan desimal ke dalam bentuk persen, dapat dilakukan dengan cara mengalikan bilangan tersebut dengan 100.
10. mengubah bilangan dari persen ke bilangan bulat, pecahan atau desimal, maka dapat dilakukan dengan membagi dengan bilangan 100.

2.6. Latihan Soal Mandiri

1. Agus menyadari bahwa ia memiliki uang sebesar $1257 pada akun yang tidak ia gunakan selama setahun. Tingkat bunga sebesar 7,3% dihitung majemuk setiap tahun. Berapa bunga yang ia diperoleh dari akun tersebut tahun lalu?
2. Perusahaan Sportcraft memproduksi pakaian denim dan berencana akan menjual jenis jeans barunya ke perusahaan ritel. Harga untuk pedagang ritel adalah $60 per potong celana jeans. Untuk memudahkan peritel, Sportcraft akan menyertakan tempelan harga pada setiap celana. Berapa yang harus dicantumkan pada tempelan harga agar peritel dapat mengurangi harga tersebut sebanyak 20% selama penjualan dan masih mendapatkan profit sebesar 15% atas harga beli di atas?
3. Uang sebanyak $10,000 telah diinvestasikan pada dua bisnis ventura, A dan B. Pada akhir tahun pertama, A dan B masing-masing memperoleh hasil sebesar 6% dan 5,75% dari nilai investasi semula. Berapakah nilai investasi yang ditanamkan agar diperoleh hasil sebesar $588,75?
4. Seorang bermaksud untuk berinvestasi sebesar $20.000 pada dua buah perusahaan hingga total penghasilannya per tahun menjadi $1440. Salah satu perusahaan memberi bunga 6% setiap tahun;perusahaan kedua, karena

memiliki resiko lebih tingga, memberinya 7,212% per tahun. Berapakah investasinya pada tiap-tiap perusahaan tersebut?

5. Seseorang telah menginvestasikan uangnya sebesar $120.000 sebagian dengan bunga 4% setahun dan sisanya 5% setahun. Total bunga pada akhir tahun pertama sama dengan suku bunga sebesar 4,12% untuk seluruh uangnya yaitu $120.000. Berapa uang yang diinvestasikan di masing-masing perusahaan tersebut?
6. Biaya pokok pembelian barang sebuah perusahaan eceran adalah $3.40 per unit. Jika pengecer tersebut ingin mendapatkan keuntungan sebesar 20% pada setiap penjualannya, berapa harga jual produk tersebut?
7. Sebuah stadion sepak bola di Manchester, berisi kapasitas 78.753 kursi penonton. Jika pada suatu pertandingan, 67.388 kursi telah penuh, berapa persenkah kursi yang masih kosong?
8. Emily Sien melaporkan penjualan sebesar $ 23.583.000 untuk kuartal ketiga, dan $ 38.792.000 untuk kuartal keempat. Berapa persen kenaikan keuntungan dari kuartal ke tiga ke kuartal ke empat?
9. Ken Sien mengurangi pengeluaran kuliahnya dari $ 9,524 di semester genap menjadi $ 8.756 di semester gasal. Berapa persenkah penurunannya?
10. Delapan puluh persen dari satu pelanggan toko membayar dengan kartu kredit. Empat puluh pelanggan datang pada hari itu. Berapa banyak pelanggan yang membayar untuk pembelian mereka dengan kartu kredit?
11. Energi angin global mengalami pertumbuhan rekor dalam tahun terakhir, mencapai tingkat 159.213 megawatt. Beberapa industri memproyeksikan kapasitas angin global menjadi 1.900.000 megawatt di tahun 2020. Berapakah kenaikan persen megawatt tambahan telah diproyeksikan untuk pasar global?
12. Lengkapilah tabel di bawah ini :

Persen	Pecahan	Desimal
………………..	$\frac{2}{5}$	………………..
50 %		
87.5%		
		0.45

13. Laba bersih untuk Hershey Foods untuk kuartal ketiga adalah $ 143.600.000 atau $ 1,09 per saham. Ini dibandingkan dengan laba bersih sebesar $ 123.100.000 atau $ 0,89 per saham untuk kuartal yang sama setahun yang lalu. Berapakah kenaikan atau penurunan jumlah saham?
14. Kuota penjualan menetapkan jumlah penjualan minimum yang diharapkan selama periode tertentu untuk tenaga penjual di beberapa bisnis, seperti menjual mobil atau rumah. Dalam menetapkan kuota penjualan, manajer penjualan memperhitungkan faktor-faktor tertentu, seperti sifat wilayah perwakilan penjualan dan pengalamannya dari tenaga penjual. Kuota penjualan tersebut memungkinkan perusahaan meramalkan pertumbuhan penjualan dan pertumbuhan masa depan perusahaan untuk tujuan anggaran dan keuntungan. Seorang perwakilan penjualan untuk perusahaan time-sharing memiliki kuota penjualan bulanan sebanyak 500 unit. Perwakilan tersebut menjual 120 unit selama minggu pertama, 135 unit pada minggu kedua, dan 165 unit pada minggu ketiga bulan ini. Berapa unit yang harus dijual sebelum akhir bulan jika wiraniaga tersebut ingin memenuhi kuota?

==

Dimanapun engkau berada,
selalulah jadi yang terbaik
dan berikan yang terbaik dari yang bisa kau berikan
(B.J. Habibie)

==

BAB III. KONSEP PERSAMAAN, PERSAMAAN LITERAL, PERSAMAAN KUADRAT DAN PERTIDAKSAMAAN

Tujuan Instruksional :

Setelah mengikuti perkuliahan dengan materi dari Bab III, diharapkan mahasiswa mampu :

- Mendefinisikan konsep persamaan.
- Mendefinisikan konsep persamaan literal dan persamaan kuadrat.
- Mendefinisikan konsep pertidaksamaan.
- Menyelesaikan masalah bisnis operasional dengan persamaan lateral, persamaan kuadrat dan pertidaksamaan

Dalam Bab III ini akan dibahas secara khusus mengenai Persamaan, yang secara rinci terbagi menjadi Persamaan Literal dan Persamaan Kuadrat, kemudian dibahas juga pertidaksamaan. Bab 3 ini dapat digunakan selama 2 pertemuan @ 3 sks, yaitu sesuai dengan RPS Matematika Bisnis, di pertemuan 5 dan 6 di mana pertemuan 5 pembahasan persamaan dan persamaan kuadrat, sedang pertemuan 6 akan membahas tentang pertidaksamaan, di mana masing-masing akan dilengkapi dengan contoh soal dalam dunia bisnis.

3.1. Persamaan

Agar dapat menyelesaikan masalah praktis, maka diperlukan suatu ketrampilan untuk menerjemahkan hubungan dari masalah yang ada, kemudian diterjemahkan menjadi simbol-simbol matematis. Hal seperti inilah yang disebut *modeling* (membuat model matematika). Ketrampilan ini hanya akan didapat jika secara tekun memahami contoh soal dan mencoba mengerjakan latihan sebanyak mungkin.

Persamaan didefinisikan sebagai pernyataan bahwa dua ekspresi adalah sama nilainya. Kedua ekspresi yang membentuk persamaan disebut sisi-sisinya. Keduanya dipisahkan oleh tanda persamaan, yaitu “=”

Contoh Persamaan : $x + 2 = 3$

Pada contoh persamaan x + 2 = 3, maka x disebut variabel, dan angka 2 serta 3 disebut konstanta. Variabel merupakan simbol dalam persamaan yang belum menunjuk pada suatu bilangan tertentu, dan konstanta merupakan simbol dalam persamaan yang menunjuk pada suatu bilangan tertentu.

Pada umumnya, variabel inilah yang harus ditentukan pada masalah di dalam persamaan. Jika variabel telah diganti dengan bilangan tertentu dan menghasilkan pernyataan yang benar, maka dikatakan variabel telah menjadi konstanta, dan demikian pula sebaliknya, jika variabel diganti dengan bilangan tertentu namun tidak menghasilkan pernyataan yang benar, maka dikatakan persamaan belum diselesaikan dengan benar.

Pada langkah pertama, akan dipelajari terlebih dahulu persamaan linear, kemudian akan ditingkatkan dengan persamaan kuadrat.

3.2. Persamaan Linear

Persamaan linear merupakan persamaan yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah 1. Ini berarti tidak ada variabel yang mempunyai pangkat 2, atau 3, atau yang lebih tinggi.

Secara umum, persamaan linear dapat dinyatakan sebagai **y = ax+b**, dimana x dan y sebagai variabel, serta a dan b sebagai konstanta. Lebih jauh lagi, x disebut variabel bebas, dan y adalah variabel terikat.

Pengertian dari variabel bebas adalah variabel yang nilainya tidak tergantung dari variabel yang lain, sedang variabel terikat adalah variabel yang nilainya tergantung dari variabel yang lain. Ini berarti nilai dari variabel y bergantung dari nilai variabel x.

Bentuk paling sederhana dari persamaan linear y = ax + b adalah x = ax + b atau secara sederhana dapat dinyatakan dengan :

$$x = ax + b$$

$$x - ax = b$$

$$x(1 - a) = b$$

$$x = \frac{b}{1-a}$$

Persamaan seperti ini sering disebut **Persamaan Literal** .

Contoh 1 :

Tentukan nilai x dari 2(x+4) = 7x + 2

Jawab :

$2(x+4) = 7x + 2$

$2x + 8 = 7x + 2$

$2x + 8 - 7x = 7x + 2 - 7x$

$-5x + 8 = 2$

$-5x + 8 - 8 = 2 - 8$

$-5x = -6$

$\frac{-5x}{-5} = \frac{-6}{-5}$

$x = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$

Contoh 2 :

Tentukan nilai dari $\frac{7x+3}{2}$ - $\frac{9x-8}{4} = 6$

Jawab :

Langkah yang dapat dilakukan adalah dengan mengerjakan seperti kita menyelesaikan pengurangan pecahan yang telah kita bahas pada bab 2, yaitu dengan menyamakan penyebut dari pecahan.

$\frac{7x+3}{2}$ - $\frac{9x-8}{4} = 6$

$\frac{14x+6}{4} - \frac{9x-8}{4} = 6$

$\frac{14x+6-9x+8}{4} = 6$

$\frac{5x+14}{4} = 6$

$(5x + 14)\ 4 = 6.4$

$5x + 14 = 24$

$5x = 10$

$x = 2$

Contoh 3 :

Penerimaan bulanan total sebuah penitipan anak dengan sejumlah x anak diwakili oleh r = 450x, dan persamaan biaya bilanan totalnya adalah c = 38x + 3.708.

Berapa jumlah anak yang harus diasuh tiap bulan agar tempat itu mencapai titik impas (penerimaan sama dengan biaya).

Jawab :

Titik impas terjadi jika penerimaan sama dengan biaya, jadi :

$$r = c$$

$$450\,x = 38x + 3.708$$

$$412\,x = 3.708$$

$$x = 9$$

Jadi jumlah anak yang harus diasuh agar penerimaan sama dengan biaya adalah 9 anak.

Contoh 4 :

Anggaplah rasio jumlah buka sebuah toko video terhadap jumlah pelanggan perharinya adalah konstan. Ketika toko dibuka selama 8 jam, maka jumlah pelanggan 92 orang lebih sedikit dari jumlah maksimum. Ketika toko dibuka selama 10 jam, maka jumlah pelanggan 46 orang lebih sedikit dari jumlah maksimum. Tentukan berapa jumlah maksimum pelanggan toko setiap harinya.

Jawab :

Andaikan jumlah maksimum pelanggan yang berkunjung ke toko tersebut adalah x.

Karena rasionya sama, maka persamaan yang terjadi adalah :

$$\frac{8}{x-92} = \frac{10}{x-46}$$

Dengan menggunakan pemahaman tentang penyelesaian pecahan pada bab 2, maka penyelesaian dari persamaan ini adalah :

$$8(x-46) = 10(x-92)$$

$$8x - 368 = 10x - 920$$

$$-2x = -552, \text{ sehingga } x = 276.$$

Ini berarti jumlah maksimal pengunjung toko tersebut adalah 276 orang.

Contoh 5 :

Seorang tenaga penjual harus menghitung biaya suatu barang dengan pajak penjualan sebesar 8,25%. Tuliskan persamaan yang mewakili biaya total c dari barang yang berbiaya x dollar.

Jawab :

Misalkan biaya suatu barang adalah x.

Maka persamaan yang terjadi adalah :

$$c = x + \frac{8{,}25}{100}x$$
$$= x + 0{,}0825x$$
$$= 1{,}0825x$$

Jadi persamaan yang mewakili biaya total adalah c = 1,0825x

Contoh 6 :

Bronwyn ingin membeli rumah, sehingga ia memutuskan untuk menabung seperempat dari gajinya. Bronwyn mendapat gaji $47 per jam dan menerima ekstra $28 per minggu karena ia menolak tunjangan dari perusahaan. Bronwyn ingin menabung paling tidak $550 per minggu. Berapa jam Bronwyn harus bekerja tiap minggunya agar bisa mencapai jumlah tersebut.

Jawab :

x = Gaji Bronwyn

Persamaan :

$$\frac{1}{4}x = \$550$$
$$x = \$2200/minggu$$

Jumlah jam = y

$$2200 = 47y + 28$$
$$47y = 2200 - 28$$
$$47y = 2172$$
$$y = 46{,}21$$

Jadi Bronwyn harus bekerja 46,21 jam dalam satu minggu agar bisa menabung $550 per minggu.

3.3. Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat dalam variabel x adalah persamaan yang dapat dituliskan dalam bentuk :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

di mana a,b dan c adalah konstanta serta $a \neq 0$

Persamaan kuadrat juga disebut persamaan pangkat dua, karena pangkat tertinggi dari variabelnya adalah 2 . Jika persamaan linear hanya memiliki satu hasil, maka persamaan kuadrat akan memiliki 2 hasil, atau 1 hasil jika hasil tersebut adalah kembar.

Beberapa metode penyelesaian persamaan kuadrat adalah sebagai berikut.

3.3.1. Menyelesaikan Persamaan Kuadrat Dengan Pemfaktoran.

Meskipun tidak semua persamaan kuadrat dapat diselesaikan dengan cara pemfaktoran, namun cara ini cukup efektif untuk mencari nilai yang benar dari permasalahan yang ada.

Untuk memfaktorkannya, cari dua bilangan yang memenuhi syarat berikut dari persamaan $ax^2+bx+c = 0$.

- Jika dikali menghasilkan nilai c.
- Jika dijumlah menghasilkan nilai b. Perhatikan bahwa tanda positif dan negatif di belakang b dan c, dimasukkan dalam perhitungan.

Misalkan bilangan yang memenuhi dua syarat di atas adalah m dan n. Maka bentuk tersebut bisa difaktorkan menjadi $(x + m)(x + n) = 0$.

Contoh 1:

Selesaikan $x^2 + x - 12 = 0$

Jawab :

Pertama, kita cari dua bilangan yang jika dikalikan menghasilkan nilai -12. Beberapa kemungkinan adalah : 1 dan -12, -1 dan 12, 3 dan -4, -3 dan 4, 6 dan -2, -2 dan 6

Kedua, dari keenam kemungkinan tersebut, maka dicari pasangan yang jika dijumlahkan, menghasilkan nilai 1. Maka kemungkinannya adalah -3 dan 4. Sehingga persamaan dapat diubah menjadi :

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$(x-3)(x+4)=0$

Ini berarti $(x-3)=0$ atau $(x+4)=0$

Sehingga : $x = 3$ atau $x = -4$

Contoh 2 :

Selesaikan $6w^2-5w=0$

Jawab :

Untuk menyelesaikan bentuk persamaan kuadrat dengan konstanta (c) = 0, maka dapat dilakukan dengan memfaktorkan variabel w nya menjadi :

$w(6w-5)=0$

$w = 0$ atau $6w-5 = 0$

Jadi $w = 0$ atau $w = \frac{5}{6}$

Contoh 3 :

Selesaikan $3x^2-x-2 = 0$

Jawab :

Pertama, kita cari dua bilangan yang jika dikalikan menghasilkan nilai -2. Beberapa kemungkinan adalah -1 dan 2, 1 dan -2.

Kedua, kita cari dua bilangan yang jika dikalikan menghasilkan nilai 3. Beberapa kemungkinan adalah 1 dan 3, -1 dan -3

Kemudian kita cari bilangan yang jika dikombinasikan, hasilnya adalah -1.

Hasilnya adalah :

$3x^2-x-2 = 0$

$(3x+2)(x-1) = 0$

Ini berarti $3x+2 = 0$ atau $x-1 = 0$

Sehingga $x = -\frac{2}{3}$ atau $x = 1$

Contoh 4 :

Kuadrat suatu bilangan dikurangi empat kali bilangan itu sama dengan -3. Tentukan model matematika dari permasalahan tersebut dan selesaikan!

Jawab :

Misalkan bilangan itu adalah x

Maka model matematika yang terjadi adalah : x^2-4x = -3

Atau persamaan matematikanya :

x^2-4x+3 = 0

(x-3)(x-1) =0

Jadi x = 3 atau x =1

Berarti bilangannya adalah 3 atau 1

Contoh 5 :

Kuadrat suatu bilangan ditambah lima kali bilangan itu dikurangi enam sama dengan nol.

Tentukan model matematika dan penyelesaian dari permasalahan tersebut!

Jawab :

Misalkan bilangan itu adalah y

Maka model matematika yang terjadi adalah : y^2+5y-6 = 0

Atau persamaan matematikanya :

y^2+5y-6 = 0

(y-1)(y+6) =0

Jadi y= 1 atau y= -6

Berarti bilangannya adalah -6 atau 1

Contoh 6 :

Jumlah dua buah bilangan sama dengan 20. Jika hasil kali kedua bilangan itu sama dengan 75.

Tentukan model matematika dari permasalahan tersebut!

Jawab :

Misalkan dua bilangan itu adalah x dan y

Maka model matematika yang terjadi adalah :

x + y = 20 ….(1)

x . y = 75 …. (2)

Dari persamaan (1), didapatkan x = 20 – y

Jika disubstitusikan ke persamaan 2, maka menjadi :

(20-y).y = 75 …(3)

Persamaan (3) dapat diubah menjadi :

$20y - y^2 = 75$

$-y^2 + 20y - 75 = 0$

$y^2 - 20y + 75 = 0$

$(y - 15)(y - 5) = 0$

$y = 15$ atau $y = 5$

Ini berarti bilangan kedua nya adalah 15 atau 5

Jika bilangan ke dua adalah 15, maka berdasar persamaan(1), bilangan pertama adalah 5.

Jika bilangan ke dua adalah 5, maka berdasar persamaan(2), bilangan pertama adalah 15.

Contoh 7 :

Dari tahun 1995 sampai 2002, banyaknya pelanggan telepon genggam N (dalam juta orang) dapat dimodelkan oleh persamaan $N = 17{,}4x^2 + 36{,}1x + 83{,}3$, dengan $x = 0$ merepresentasikan tahun 1995.Pada tahun berapa banyaknya pelanggan telepon genggam mencapai angka 3.750 juta?

Jawab :

Dari soal diketahui bahwa $N = 17{,}4x^2 + 36{,}1x + 83{,}3$ dan kita diminta untuk menentukan tahun ketika banyaknya pelanggan telepon genggam mencapai 3.750 juta. Dengan kata lain, kita diminta untuk menentukan nilai $1995 + x$ ketika $N =$ 3.750.

$$\begin{aligned} 3.750 &= 17{,}4x^2 + 36{,}1x + 83{,}3 \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= 17{,}4x^2 + 36{,}1x - 3.666{,}7 \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-36{,}1 \pm \sqrt{(36{,}1)^2 - 4(17{,}4)(-3.666{,}7)}}{2(17{,}4)} \\ &= \frac{-36{,}1 \pm \sqrt{256.505{,}53}}{34{,}8} \\ x &\approx 13{,}52 \quad \textbf{atau} \quad x = -15{,}59 \end{aligned}$$

Karena waktu tidak pernah negatif, maka kita simpulkan bahwa 13,52 tahun setelah tahun 1995, yaitu tahun 2008, banyaknya pelanggan telepon genggam mencapai angka 3.750 juta.

Contoh 8 :

Selisih tiga kali kuadrat suatu bilangan dengan tiga belas kali bilangan itu sama dengan negatif 4. Maka tentukanlah bilangan tersebut.

Jawab :

Langkah yang dapat dilakukan adalah

a. Misalkan bilangan itu adalah x.

b. Berdasarkan ketentuan pada soal, kita peroleh hubungan sebagai berikut.

$3x^2 – 13x = -4$

c Kemudian kita tentukan akar-akar persamaan kuadrat tersebut:

$3x^2 – 13x = -4$

$\Leftrightarrow 3x^2 – 13x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (3x – 1)(x – 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1/3$ atau $x = 4$

Dengan demikian, bilangan yang dimaksud adalah 1/3 atau 4.

Contoh 9 :

Jumlah dua buah bilangan sama dengan 30. Jika hasil kali kedua bilangan itu sama dengan 200, tentukanlah bilangan tersebut.

Jawab :

Misalkan bilangan-bilangan itu adalah x dan y, maka $x + y = 30$ atau $y = 30 – x$. berdasarkan ketentuan dalam soal, kita peroleh hubungan sebagai berikut.

$x \,.\, y = 200$

$\Leftrightarrow x(30 – x) = 200$

$\Leftrightarrow 30x – x^2 = 200$

$\Leftrightarrow x^2 – 30x + 200 = 0$

$\Leftrightarrow (x – 10)(x – 20) = 0$

$\Leftrightarrow x = 10$ atau $x = 20$

Untuk $x = 10$ diperoleh $y = 30 – 10 = 20$

Untuk x = 20 diperoleh y = 20 – 10 = 10

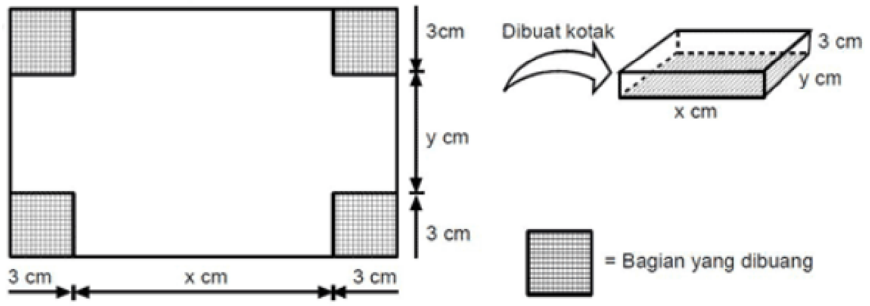
Jadi bilangan yang dimaksud adalah 10 dan 20

Contoh 10 :

Selembar karton berbentuk persegi panjang akan dibuat kotak tanpa tutup dengan cara membuang persegi seluas 3×3 cm^2 di masing-masing pojoknya. Apabila panjang alas kotak 2 cm lebih dari lebarnya dan volum kotak itu adalah 105 cm^3. Tentukanlah panjang dan lebar alas kotak tersebut.

Jawab :

Langkah pertama, kita buat sketsa dari kertas karton tersebut seperti yang diperlihatkan pada gambar di bawah ini.



Misalkan panjang kotak adalah x dan lebarnya adalah y. Dengan memperhatikan gambar di atas, maka kita dapatkan tinggi kotak adalah 3 cm. Oleh karena panjang kotak 2 cm lebih dari lebarnya, maka

$x = y + 2$ atau $y = x - 2$

karena volume kotak diketahui 105 cm^3, maka kita peroleh

panjang × lebar × tinggi = 105

$\Leftrightarrow x \,.\, y \,.\, 3 = 105$

$\Leftrightarrow 3x \,.\, y = 105$

$\Leftrightarrow 3x(x - 2) = 105$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 105$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 35$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 35 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 5)(x - 7) = 0$

$\Leftrightarrow x = -5$ atau $x = 7$

Karena panjang alas tidak mungkin negatif, maka kita ambil $x = 7$. Kemudian kita subtitusikan $x = 7$ ke $y = x - 2$, sehingga diperoleh $y = 7 - 2 = 5$.

Dengan demikian, panjang alas kotak adalah 7 cm dan lebarnya adalah 5 cm.

Contoh 11 :

Kuadrat suatu bilangan dikurangi empat kali bilangan itu sama dengan -3. Tentukan bilangan tersebut.

Jawab :

Misalkan bilangan itu adalah x. Berdasarkan ketentuan soal, kita peroleh hubungan sebagai berikut.

$x^2 - 4x = -3$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$ atau $x = 1$

Jadi bilangan yang dimaksud adalah 3 atau 1.

Contoh 12 :

Jika selisih dua kali kuadrat suatu bilangan dengan tiga kali bilangan itu sama dengan 9, tentukan bilangan tersebut.

Jawab :

Misalkan bilangan itu adalah x, berdasarkan soal kita dapatkan hubungan sebagai berikut.

$2x^2 - 3x = 9$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 9 = 0$

$\Leftrightarrow (2x + 3)(x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = -3/2$ atau $x = 3$

Dengan demikian bilangan yang dimaksud adalah -3/2 atau 3.

Contoh 13 :

Kuadrat suatu bilangan ditambah lima kali bilangan itu dikurangi enam sama dengan nol. Tentukan bilangan itu.

Jawab :

Misalkan bilangan itu p. Berdasarkan ketentuan dalam soal, kita peroleh hubungan sebagai berikut.

$p^2 + 5p - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (p + 6)(p - 1) = 0$

$\Leftrightarrow p = -6$ atau $p = 1$

Jadi bilangan yang dimaksud adalah -6 atau 1.

Contoh 14 :

Jumlah dua buah bilangan sama dengan 20. Jika hasil kali kedua bilangan itu sama dengan 75 tentukan bilangan-bilangan tersebut.

Jawab :

Misalkan bilangan-bilangan itu adalah x dan y, berarti $x + y = 20$ atau $y = 20 - x$. Berdasarkan ketentuan soal, kita peroleh hubungan sebagai berikut.

$x \cdot y = 75$

$\Leftrightarrow x(20 - x) = 75$

$\Leftrightarrow 20x - x^2 = 75$

$\Leftrightarrow x^2 - 20x + 75 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 5)(x - 15) = 0$

$\Leftrightarrow x = 5$ atau $x = 15$

Untuk $x = 5$ diperoleh $y = 20 - 5 = 15$

Untuk $x = 15$ diperoleh $y = 20 - 15 = 5$

Jadi bilangan yang dimaksud adalah 5 dan 15

Contoh 15 :

Jumlah dua bilangan sama dengan 6 dan jumlah kuadrat dari masing-masing bilangan itu sama engan 116. Tentukan kedua bilangan tersebut.

Jawab :

Misalkan kedua bilangan itu x dan y. Berarti $x + y = 6$ atau $y = 6 - x$. Berdasarkan ketentuan dalam soal, kita peroleh hubungan sebagai berikut.

$x^2 + y^2 = 116$

$\Leftrightarrow x^2 + (6 - x)^2 = 116$

$\Leftrightarrow x^2 + 36 - 12x + x^2 = 116$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 36 = 116$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 36 - 116 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x - 80 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 40 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 10)(x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 10$ atau $x = -4$

Untuk $x = 10$ diperoleh $y = 6 - 10 = -4$

Untuk $x = -4$ diperoleh $y = 6 - (-4) = 10$

Jadi bilangan yang dimaksud adalah -4 dan 10

Contoh 16 :

Selembar karton berbentuk empat persegi panjang akan dibuat kotak tanpa tutup dengan cara membuang persegi seluas 2×2 cm^2 pada masing-masing pojok persegi panjang tersebut. Panjang bidang alas kotak adalah 4 cm lebih besar dari lebarnya dan volume kotak itu 90 cm^3. Maka tentukan panjang dan lebar alas kotak tersebut.

Jawab :

Misalkan panjang alas adalah x cm dan lebar alas y cm. Maka $x = y + 4$ atau $y = x - 4$. Karena volume kotak diketahui 90 cm^3, maka kita peroleh hubungan sebagai berikut.

Panjang $\times$ lebar $\times$ tinggi = 90

$\Leftrightarrow x \,.\, y \,.\, 2 = 90$

$\Leftrightarrow x \,.\, y = 45$

$\Leftrightarrow x(x - 4) = 45$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 45 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 9)(x + 5) = 0$

$\Leftrightarrow x = 9$ atau $x = -5$

Karena panjang alas tidak mungkin negatif, maka kita ambil $x = 9$. Kemudian kita subtitusikan $x = 9$ ke $y = x - 4$, sehingga diperoleh $y = 9 - 4 = 5$.

Dengan demikian, panjang alas kotak adalah 9 cm dan lebarnya adalah 5 cm.

3.3.2. Menyelesaikan Persamaan Kuadrat Dengan Rumus

Metode lain yang dapat digunakan untuk semua bentuk persamaan kuadrat adalah dengan menggunakan rumus yang terkenal dengan rumus ABC .

Untuk persamaan kuadrat $ax^2+bx+c = 0$, rumus itu adalah :

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Contoh 1 :

Selesaikan persamaan kuadrat $x^2-2x-35 = 0$.

Jawab :

Ini berarti a = 1, b = -2 dan c= -35

Dengan rumus ABC, didapatkan :

$$X_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2-4.(1).(-35)}}{2.1}$$

$$X_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{144}}{2}$$

$$X_{1,2} = \frac{2 \pm 12}{2}$$

Sehingga : $X_1 = \frac{2+12}{2} = 7$

atau $X_2 = \frac{2-12}{2} = -5$

Contoh 2 :

Direksi perusahaan Maven Corporation setuju untuk menebus beberapa obligasinya dalam dua tahun. Ketika itu, dibutuhkan dana sebesar $1.102.500. Jika perusahaan saat ini menyisakan dana $1.000.000. Berapa suku bunga tahunan suatu investasi, dengan sistem bunga majemuk (tahunan), agar uang tersebut di akhir tahun kedua akan cukup untuk menebus obligasinya?

Jawab :

Misalkan r adalah tingkat suku bunga yang diharapkan. Pada akhir tahun pertama, akumulasi nilai investasi adalah $1.000.000 ditambah bunga, yaitu 1.000.000r, sehingga jumlah total adalah :

1.000.000 + 1.000.000r = 1.000.000(1+r)

Pada sistem bunga majemuk, pada akhir tahun kedua akumulasi jumlah modal menjadi 1.000.000(1+r) ditambah bunga dari jumlah tersebut yaitu 1.000.000(1+r)r. Jadi total nilai pada akhir tahun kedua adalah :

$1.000.000(1+r) + 1.000.000(1+r)r$

Total nilai pada akhir tahun ke dua ini harus sama dengan 1.102.500

$1.000.000(1+r) + 1.000.000(1+r)r = 1.102.500$

atau $1.000.000(1+r)(1+r) = 1.102.500$

$$1.000.000(1+r)^2 = 1.102.500$$

$$(1+r)^2 = \frac{1.102.500}{1.000.00} = 1,1025$$

$$(1+r) = \pm\sqrt{1,1025}$$

$$1+r = \pm 1,05$$

Sehingga :

$1 + r = 1,05$ atau $1 + r = -1,05$

$r = 0,05$ atau $r = -2,05$

Karena bunga selalu positif, maka diambil $r = 0,05$, atau 5%

Contoh 3 :

Sebuah perusahaan real-estate memiliki apartemen Parklane Garden yang terdiri dari 96 unit apartemen. Dengan biaya \$550 per bulan, semua apartemen penuh disewa. Tetapi untuk setiap kenaikan tarif \$25 per bulan, akan ada tiga apartemen kosong tanpa ada kemungkinan diisi. Perusahaan ingin mendapatkan \$54.600 per bulan dari uang sewa apartemen. Berapa seharusnya biaya sewa apartemen tersebut per bulannya?

Jawab :

Misalkan n adalah angka pengali \$25. Maka kenaikan biaya sewa per apartemen 25n dan akan terdapat 3n apartemen kosong.

Karena total biaya sewa = (biaya sewa per apartemen) x (jumlah apartemen yang disewa), kita dapatkan :

$54.600 = (550 + 2n)(96 – 3n)$

$54.600 = 52.800 + 750n – 75n^2$

$75n^2 – 750n + 1800 = 0$

$n^2 - 10n + 24 = 0$

$(n-6)(n-4) = 0$

Jadi $n = 6$ atau $n = 4$.

Sehingga biaya sewa sebesar $550 + 25(6) = \$700$ atau $550 + 25(4) = \$650$

Tetapi mudah untuk dilihat bahwa perusahaan real-estate dapat menerima \$54.675 per bulan dengan biaya sewa sebesar \$675 per apartemen, dan bahwa \$54.675 merupakan biaya sewa maksimum yang dapat diterima, mengingat kondisi pasar yang ada.

3.4. Latihan Soal Persamaan Kuadrat

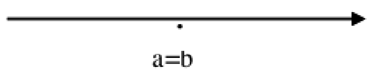
1. Selembar karton berbentuk persegi panjang akan dibuat kotak tanpa tutup dengan cara membuang persegi seluas 3 x 3 cm2 di masing-masing pojoknya. Panjang kotak 2 cm lebih dari lebarnya dan volum kotak itu adalah 105 cm^3. Tentukan model matematika dari permasalahan tersebut!
2. Sebuah pagar harus dipasang di sekitar ruang pesergi panjang, sehingga luas ruang yang tertutup pagar adalah 800 kaki kuadrat, dan panjang ruang tersebut dua kali lebarnya. Berapa total panjang pagar (dalam kaki) yang harus dipasang?
3. Seorang produsen video-game menjual setiap keeping CD seharga \$21.95. Biaya produksi dari setiap keping adalah \$14.92. Biaya tetap sebulan adalah \$8.500. Dalam bulan pertama penjualan game baru, berapa CD yang harus terjual agar produsen mencapai titik impas? (yaitu agar total pendapatan sama dengan total biaya)
4. Sebuah klub investasi membeli sebuah obligasi perusahaan minyak seharga \$5000. Perusahaan ini memberikan keuntungan sebesar 4% per tahun. Saat ini klub bermaksud akan membeli saham sebuah perusahaan pemasok kincir angin. Saham dijual dengan harga \$20 per lembar dan dividennya \$0.50 per lembar per tahun. Berapa lembar saham yang harus dibeli oleh klub agar total investasinya pada saham dan obligasi memberikan keuntungan sebesar 3% per tahun.
5. Areal parkir sebuah perusahaan berukuran panjang 120 kaki dan lebar 80 kaki. Karena jumlah karyawan terus bertambah, diputuskan untuk melipat-duakan luas areal parkir dengan menambah jalur parkir baru, dengan lebar yang sama hingga tepi areal. Berapakah lebar jalur baru tersebut?
6. Anda adalah seorang kepala konsultan keuangan pada sebuah perusahaan yang memiliki kompleks perkantoran terdiri dari 50 unit. Harga sewa per unit adalah

$400 per bulan. Tetapi, untuk setiap penambahan harga $20 perbulan, akan terdapat dua unit yang kosong dan tidak mungkin terisi. Perusahaan bermaksud ingin mendapat penghasilan total sebesar $20,240 per bulan dari harga sewa tersebut. Anda diminta untuk menetapkan harga sewa tersebut yang akan berlaku untuk setiap unit. Apa jawaban Anda?

3.5. Pertidaksamaan Linear

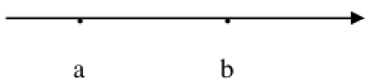
Misalkan a dan b adalah dua buah titik pada garis bilangan real. Maka terdapat 3 kemungkinan hubungan antara dua titik, yaitu :

(i) kedua titik tersebut dapat berhimpit sesamanya, seperti tampak pada gambar 3.1. Jika kedua titik berhimpit, maka dapat dikatakan a = b, dapat dibaca : a sama dengan b.



Gambar 3.1. Dua Bilangan Sama

(ii) Titik a berada di sebelah kiri titik b, seperti pada gambar 3.2. Kondisi seperti ini, dikatakan a < b, dapat dibaca a lebih kecil dari b.



Gambar 3.2. a < b

(iii) Titik a berada di sebelah kanan titik b, seperti pada gambar 3.3. Kondisi seperti ini, dikatakan a > b, dapat dibaca a lebih besar dari b.

Gambar 3.3. a > b

Tanda pertidak samaan yang lain adalah ≤, dibaca lebih kecil atau sama dengan, dan didefinisikan sebagai a ≤ b jika dan hanya jika a < b dan a = b.

Selain itu, juga terdapat tanda pertidak samaan ≥, dibaca lebih besar atau sama dengan, dan didefinisikan sebagai a ≥ b jika dan hanya jika a > b dan a = b.

Suatu pertidaksamaan adalah suatu pernyataan bahwa salah satu jumlah lebih kecil dari atau lebih besar dari, atau lebih kecil atau sama dengan, atau lebih besar atau sama dengan jumlah lain.

Jika dua pertidaksamaan mempunyai tanda pertidak samaan yang menunjuk ke suatu arah yang sama, maka pertidaksamaan tersebut dikatakan mempunyai logika yang sama. Jika tidak, keduanya disebut berlawanan secara logika. Jadi $a < b$ dan $c < d$ mempunyai logika yang sama, sedang $a < b$ dan $c > d$ mempunyai logika yang berlawanan.

3.5.1. Aturan Pertidaksamaan

Untuk dapat menyelesaikan pertidaksamaan, maka diperlukan beberapa aturan pertidaksamaan, yaitu :

1. Jika suatu angka yang sama ditambahkan atau dikurangkan dari kedua sisi sebuah pertidaksamaan, maka diperoleh pertidaksamaan baru, dengan logika yang sama dengan pertidaksmaan semula. Secara simbolis dapat dinyatakan:

   Jika $a < c$, maka $a+c < b+c$ dan $a-c < b-c$

2. Jika kedua sisi suatu pertidaksamaan dikalikan atau dibagikan dengan sebuah angka positif yang sama, maka diperoleh pertidaksamaan baru, dengan logika yang sama dengan pertidaksamaan semula. Secar simbolis dapat dinyatakan:

   Jika $a < b$, dan $c > 0$, maka $ac < bc$ dan $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

3. Jika kedua sisi suatu pertidaksamaan dikalikan atau dibagi dengan sebuah angka negatif yang sama, maka diperoleh pertidak samaan baru, dengan logika yang berlawanan dengan pertidaksamaan semula. Secara simbolis dapat dinyatakan:

   Jika $a < b$, dan $c < 0$, maka $ac > bc$ dan $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

4. Setiap sisi suatu pertidaksamaan dapat digantikan dengan sebuah ekspresi yang sama dengan dengannya. Secara simbolis dapat dinyatakan:

   Jika $a < b$, dan $a = b$, maka $c < b$

5. Jika kedua sisi suatu pertidaksamaan adalah positif atau keduanya negatif, kemudian kedua sisi tersebut dibalik (dipertukarkan pembilang dan penyebutnya), maka diperoleh pertidaksamaan baru dengan logika yang berlawanan dengan pertidaksamaan semula. Secara simbolis dapat dinyatakan:

Jika $0 < a < b$, atau $a < b < 0$, maka $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

6. Jika kedua sisi suatu pertidaksamaan adalah positif dan masing-masing dipangkatkan dengan angka positif yang sama, maka diperoleh pertidaksamaan baru, dengan logika yang sama dengan pertidaksamaan semula. Secara simbolis dapat dinyatakan:

Jika $0 < a < b$, dan $n > 0$, maka $a^n < b^n$

Jika n adalah bilangan bulat positif, peraturan ini lebih jauh menetapkan :

Jika $0 < a < b$, maka $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

Setelah dipelajari mengenai aturan pertidaksamaan, maka akan dipelajari cara menyelesaikan pertidaksamaan linear.

Definisi : Pertidaksamaan linear dengan variabel x adalah sebuah pertidaksamaan yang dapat ditulis dalam bentuk : $ax + b < 0$, di mana a dan b adalah konstanta dan $a \neq 0$

Harus diingat bahwa pertidaksamaan tersebut benar untuk beberapa nilai x dan salah untuk nilai lainnya. Untuk menyelesaikan sebuah pertidaksamaan yang mengandung satu variabel adalah mencari semua nilai variabel di mana pertidaksamaan adalah benar.

Contoh 1 :

Selesaikan $2(x-3) < 4$

Jawab :

$2(x-3) < 4$

$2x - 6 < 4$ (aturan 4)

$2x - 6 + 6 < 4 + 6$ (aturan 1)

$2x < 10$ (aturan 4)

$\frac{2x}{2} < \frac{10}{2}$ (aturan 2)

$x < 5$ (aturan 4)

Contoh 2 :

Selesaikan $\frac{3}{2}(s-2) + 1 > -2(s-4)$

Jawab :

$2(\frac{3}{2}(s-2) + 1) > 2(-2(s-4))$

$$3(s-2)+2 > -4(s-4)$$
$$3s - 4 > -4s + 16$$
$$7s > 20$$
$$s > \frac{20}{7}$$

Contoh 3 :

Untuk suatu perusahaan yang memproduksi alat pemanas akuarium, total biaya untuk pekerja dan material adalah \$21 perpemanas. Biaya tetap (biaya-biaya yang dikeluarkan pada suatu perioda tertentu, tidak tergantung hasil produksi) adalah \$70.000. Jika harga jual sebuah alat pemanas adalah \$35, berapa banyak lata pemanas harus terjual jika perusahaan menginginkan suatu keuntungan?

Jawab :

Dengan mengingat bahwa profit = total pendapatan – total biaya, dan diinginkan adanya keuntungan, maka profit > 0, sehingga :

$$\text{pendapatan} - \text{total biaya} > 0$$
$$35q - (21q + 70.000) > 0$$
$$14q - 70.000 > 0$$
$$14q > 70.000$$
$$q > 5.000$$

Karena jumlah alat pemanas harus bulat positif, maka dapat dipastikan, bahwa paling sedikit 5001 unit harus terjual agar perusahaan mendapatkan keuntungan.

Contoh 4 :

Seorang pemborong bangunan harus memutuskan apakah akan menyewa atau membeli sebuah mesin eskavator. Jika menyewa, biayanya adalah \$3000 per bulan (kontrak selama setahun), dan biaya operasional harian (bensin, oli, dan operator) sebesar \$180 untuk setiap hari beroperasi. Jika membeli, biaya tetap per tahun adalah \$20.000 dan biaya operasional serta perawatan adalah \$230 setiap hari mesin dioperasikan. Berapa harikah minimal mesin harus dioperasikan setiap tahun oleh pemborong tersebut jika diputuskan untuk menyewa mesin alih-alih membelinya?

Jawab :

Misalkan d adalah jumlah harian dalam satu tahun di mana mesin dioperasikan. Jika menyewa mesin, total biaya setahun terdiri dari biaya sewa, yaitu 12 x 3.000 dan beban hariannya adalah 180 d. Jika mesin dibeli, biaya pertahunnya adalah 20.000 + 230 d.

Kita menginginkan biaya sewa < biaya beli , sehingga :

12(3000) + 180 d < 20.000 + 230 d

36.000 + 180d < 20.000 + 230 d

16.000 < 50 d

50 d > 16.000

d > 320

Jadi pemborong harus mengoperasikan mesin eskavator tersebut paling sedikit selama 321 hari untuk memastikan bahwa ia akan menyewanya.

Contoh 5 :

Sebuah perusahaan penerbitan mendapati bahwa biaya penerbitan setiap majalah tertentu adalah $1,50. Pendapatan dari distributor adalah $1,40 per majalah. Biaya iklan 10% dari pendapatan yang diterima dari distributor untuk semua majalah yang terjual di atas 10.000. Berapakah jumlah paling sedikit yang harus terjual sehingga diperoleh keuntungan bagi perusahaan penerbit tersebut?

Jawab :

Karena profit = total pendapatan – total biaya, dan diharapkan adanya profit, ini berarti :total pendapatan – total biaya > 0

Misalkan q adalah adalah jumlah majalah yang terjual. Pendapatan dari distributor adalah 1,40 q dan pendapatan dari iklan 0,1 x 1,4 x (q-1000). Total biaya pendapatan adalah 1,5 q. Jadi :

total pendapatan – total biaya > 0

1,4 q + 0,1 x 1,4 x (q-1000) – 1,5 q > 0

1,4 q + 0,14 q – 1400 -1,5 q > 0

0,04 q – 1400 > 0

0,04 q > 1400

q > 35.000

Karenanya, jumlah yang terjual harus lebih besar dari 35.000, jadi paling sedikit 35.001 majalah harus terjual untuk menjamin diperoleh keuntungannya.

Contoh 6 :

Untuk masuk ke sebuah SMPN yang diinginkan, Emma harus memperoleh nilai rata-rata tiga mata pelajaran yang diperlukan tidak kurang dari 80. Nilai yang diperoleh Emma dari dua mata pelajaran adalah 79 dan 83. Berapakah nilai mata pelajaran yang ketiga supaya Emma memenuhi syarat tersebut?

Jawab:

Misal x= nilai Ema pada mata pelajaran pertama

y = nilai Ema pada mata pelajaran kedua

z = nilai Ema pada mata pelajaran ketiga

Maka :

$$\frac{x + y + z}{3} \geq 80$$

$$\frac{79 + 83 + z}{3} \geq 80$$

$$\frac{79 + 83 + z}{3} \geq 80$$

$$\frac{162 + z}{3} \geq 80$$

$162 + z \geq 240$

$z \geq 78$

Jadi supaya Emma memenuhi syarat diterima di SMPN tersebut, maka nilai pada pelajaran ke tiga minimal harus 78.

Contoh 7 :

Dua orang kakak beradik patungan untuk membeli sebuah kado untuk ulang tahun pernikahan orang tua mereka. Uang yang mereka kumpulkan tidak lebih dari Rp. 75.000,00. Jika adiknya membayar Rp. 15.000,00 kurang dari kakaknya. Buat pertidaksamaan yang memuat keterangan di atas, kemudian tentukanlah jumlah uang yang harus diberikan kakaknya.

Jawab :

Misal : x = jumlah uang yang dibayar oleh kakak y = jumlah uang yang dibayar oleh adik

$x + y \leq 75000$

$y = x - 15000$

Sehingga :

$x + x - 15000 \leq 75000$

$2x \leq 90000$

$x \leq 45000$

Jadi kakak paling sedikit harus memberikan uang Rp 45.000,- dan adik memberikan uang paling sedikit Rp 30.000,-

Contoh 8 :

Keliling sebuah persegi panjang sama dengan 20 cm. Jika luas persegi panjang itu tidak kurang dari 21 cm^2, maka tentukanlah batas-batas nilai panjang dari persegi panjang tersebut.

Jawab :

Misalkan panjang dan lebar persegi panjang tersebut adalah x cm dan y cm. Maka keliling persegi panjang adalah $K = 2(x + y) = 20$

$\Leftrightarrow 2(x + y) = 20$

$\Leftrightarrow x + y = 10$

$\Leftrightarrow y = 10 - x$

Luas persegi panjang adalah adalah $L = x \, . \, y$

$\Leftrightarrow L = x(10 - x)$

$\Leftrightarrow L = 10x - x^2$

Dari soal telah ditentukan bahwa luas persegi panjang tidak kurang dari 21 cm^2, hal ini berarti $L \geq 21$ sehingga

$\Leftrightarrow 10x - x^2 \geq 21$

$\Leftrightarrow 10x - x^2 - 21 \geq 0$ (kita ubah $-x_2$ menjadi x_2 dengan mengali kedua ruas dengan -1)

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 21 \leq 0$ (jika kedua ruas dikali dengan bilangan negatif, maka tanda berubah)

$\Leftrightarrow (x - 3)(x - 7) \leq 0$

Dari sini kita peroleh $x = 3$ dan $x = 7$

Kita tentukan batas interval yang memenuhi pertidaksamaan $x^2 - 10x + 21 \leq 0$ yaitu sebagai berikut.

Tabel Hasil Uji Interval

Nilai Uji	Nilai $x^2 - 10x + 21 = 0$	Tanda Interval
$x = 0$ $(x < 3)$	$(0)^2 - 10(0) + 21 = +21$	+ atau > 0
$x = 4$ $(3 < x < 7)$	$(4)^2 - 10(4) + 21 = -3$	− atau < 0
$x = 8$ $(x > 7)$	$(8)^2 - 10(8) + 21 = +5$	+ atau > 0

Dari tabel hasil uji interval di atas, maka interval yang memenuhi pertidaksamaan $x^2 - 10x + 21 \leq 0$ adalah $3 \leq x \leq 7$.

Dengan demikian, batas-batas nilai panjang dari persegi panjang itu adalah mulai dari 3 cm sampai dengan 7 cm.

Contoh 9 :

Hasil produksi suatu barang dinyatakan dengan persamaan $P(x) = -x^2 + 28x - 60$ unit barang untuk bahan baku yang diperlukan. Apabila hasil produksi (P) mencapai lebih dari 100 unit, maka banyaknya bahan baku x yang diperlukan adalah…

Jawab :

Hasil produksi mencapai lebih dari 100 unit berarti $P(x) > 100$ sehingga

$\Leftrightarrow -x^2 + 28x - 60 > 100$

$\Leftrightarrow -x^2 + 28x - 60 - 100 > 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 28x - 160 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 28x + 160 < 0$

$\Leftrightarrow (x - 20)(x - 8) < 0$

Dari sini kita peroleh $x = 8$ dan $x = 20$

Kita tentukan batas interval yang memenuhi pertidaksamaan $x^2 - 28x + 160 < 0$ yaitu sebagai berikut.

Tabel Hasil Uji Interval

Nilai Uji	Nilai $x^2 - 28x + 160 = 0$	Tanda Interval
$x = 0$ $(x < 8)$	$(0)^2 - 28(0) + 160 = +160$	+ atau > 0
$x = 9$ $(8 < x < 20)$	$(9)^2 - 28(9) + 160 = -11$	− atau < 0

Nilai Uji	Nilai $x^2 - 28x + 160 = 0$	Tanda Interval
$x = 21$ $(x > 20)$	$(21)^2 - 28(21) + 160 = +43$	+ atau > 0

Dari tabel hasil uji interval di atas, maka interval yang memenuhi pertidaksamaan $x^2 - 28x + 160 < 0$ adalah $8 < x < 20$.

Dengan demikian, banyaknya bahan baku yang dibutuhkan adalah lebih dari 8 unit dan kurang dari 20 unit.

Contoh 10 :

Sebuah peluru ditembakkan ke atas. ketinggian peluru yang dicapai (dalam meter) dinyatakan sebagai $h(t) = 30t - t^2$. Berapa lamakah peluru itu berada pada ketinggian tidak kurang dari 221 meter?

Jawab :

Ketinggian peluru tidak kurang dari 221 meter, berarti $h(t) \geq 221$ sehingga

$\Leftrightarrow 30t - t^2 \geq 221$

$\Leftrightarrow 30t - t^2 - 221 \geq 0$

$\Leftrightarrow t^2 - 30t + 221 \leq 0$

$\Leftrightarrow (t - 13)(t - 17) \leq 0$

Sampai sini kita dapatkan $t = 13$ dan $t = 17$

Kita tentukan batas interval yang memenuhi pertidaksamaan $t^2 - 30t + 221 \leq 0$ yaitu sebagai berikut.

Tabel Hasil Uji Interval

Nilai Uji	Nilai $t^2 - 30t + 221 = 0$	Tanda Interval
$t = 0$ $(t < 13)$	$(0)^2 - 30(0) + 221 = +221$	+ atau > 0
$t = 14$ $(13 < t < 17)$	$(14)^2 - 30(14) + 221 = -3$	− atau < 0
$t = 18$ $(x > 17)$	$(18)^2 - 30(18) + 221 = +5$	+ atau > 0

Dari tabel hasil uji interval di atas, maka interval yang memenuhi pertidaksamaan $t^2 - 30t + 221 \leq 0$ adalah $13 \leq t \leq 17$.

Dengan demikian, peluru akan berada pada ketinggian tidak kurang dari 221 meter yaitu dari detik ke-13 sampai dengan detik ke-17 atau dalam selang waktu $(17 - 13)$ detik = 4 detik.

Contoh 11 :

Suatu kolam renang berbentuk persegi panjang akan dibuat dengan keliling 30 m. Jika luas kolam renang paling sedikit 50 m^2, maka tentukanlah interval panjang kolam renang (dalam meter) yang memenuhi syarat tersebut.

Jawab :

Misalkan panjang dan lebar kolam renang tersebut adalah x cm dan y cm. Maka keliling kolam renang adalah $K = 2(x + y) = 30$

$\Leftrightarrow 2(x + y) = 30$

$\Leftrightarrow x + y = 15$

$\Leftrightarrow y = 15 - x$

Luas kolam renang adalah adalah $L = x \, . \, y$

$\Leftrightarrow L = x(15 - x)$

$\Leftrightarrow L = 15x - x^2$

Dari soal telah ditentukan bahwa luas kolam renang paling sedikit 50 m^2, hal ini berarti $L \geq 50$ sehingga

$\Leftrightarrow 15x - x^2 \geq 50$

$\Leftrightarrow 15x - x^2 - 50 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 15x + 50 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x - 5)(x - 10) \leq 0$

Sampai sini kita peroleh x = 5 dan x = 10

Kita tentukan batas interval yang memenuhi pertidaksamaan $x^2 - 15x + 50 \leq 0$ yaitu sebagai berikut.

Tabel Hasil Uji Interval

Nilai Uji	Nilai $x^2 - 15x + 50 = 0$	Tanda Interval
$x = 0$ $(x < 5)$	$(0)^2 - 15(0) + 50 = +50$	+ atau > 0
$x = 6$ $(5 < x < 10)$	$(6)^2 - 15(6) + 50 = -4$	− atau < 0
$x = 11$ $(x > 10)$	$(11)^2 - 15(11) + 50 = +6$	+ atau > 0

Dari tabel hasil uji interval di atas, maka interval yang memenuhi pertidaksamaan $x^2 - 15x + 50 \leq 0$ adalah $5 \leq x \leq 10$.

Dengan demikian, interval atau batas panjang kolam renang adalah mulai dari 5 meter hingga 10 meter.

3.6. Latihan Soal Pertidaksamaan Linear

1. Untuk suatu perusahaan yang memproduksi alat pemanas akuarium, total biaya untuk pekerja dan material adalah \$21 per pemanas. Biaya tetap (biaya yang dikeluarkan pada suatu perioda tertentu, tidak tergantung hasil produksi) adalah \$70.000. Jika sebuah alat pemanas adalah \$35, berapa banyak alat pemanas harus terjual jika perusahaan menginginkan suatu keuntungan?
2. Seorang pemborong bangunan harus memutuskan apakah akan menyewa atau membeli sebuah mesin ekskavator. Jika menyewa, biayanya adalah \$3000 per bulan (kontrak selama sethaun), dan biaya operasional harian (bensin, oli dan operator) adkaah sebesar \$180 untuk setiap hari beroperasi. Jika membeli, biaya tetap pertahun adalah \$20.000, dan biaya operasional serta perawatan adalah \$230 setiap hari mesin dioperasikan. Berapa harikah minimal mesin harus dioperasikan setiap tahun oleh pemborong tersebut jika diputuskan untuk menyewa mesin saja?
3. Rasio lancar suatu bisnis adalah perbandingan antara harta lancar (seperti kas, inventori dan piutang) terhadap utang lancarnya (misalnya pinjaman jangka pendek dan utang pajak). Setelah berkonsultasi dengan pengawas keuangan, Direktur Utama perusahaan Ace Sports Equipment memutuskan untuk melakukan pinjaman jangka pendek guna membangun sistem inventorinya. Perusahaan memiliki harta lancar senilai \$350.000 dan utang lancar \$80.000. Berapakah jumlah uang yang akan dipinjam oleh perusahaan jika rasio lancarnya tidak boleh lebih rendah dari 2,5? (catatan : Dana yang diterima dianggap harta lancar dan pinjaman adalah utang lancar)
4. Sebuah perusahaan penerbitan mendapati bahwa biaya penerbitan setiap majalah tertentu adalah \$1,50. Pendapatan dari distributor adalah \$1,40 per majalah. Biaya iklan 10% dari pendapatan yang diterima dari distributor untuk semua majalah yang terjual di atas 10.000. Berapakah jumlah paling sedikit yang harus terjual sehingga diperoleh keuntungan bagi perusahaan penerbit tersebut?
5. Seorang wanita pebisnis ingin menentukan pilihan antara memiliki dan menyewa sebuah mobil. Ia dapat menyewa sebuah mobil dengan biaya \$420 per bulan (beredasar kontrak tahunan). Dengan program ini, biaya per mil

(bensin dan oli) adalah $0,06. Jika ia harus membeli mobil tersebut, maka biaya tetap pertahun adalah $4700, dan biaya-biaya lain sebesar $0.08 per mil. Berapa milkah paling sedikit yang harus dia tempuh, dalam setahun agar menyewa mobil menjadi tidak lebih mahal dibanding membelinya?

6. Para tukang cat seringkali dibayar per jam atau borongan. Tingkat upah mereka dapat berpengaruh terhadap kecepatan kerja. Misalnya mereka akan bekerja dengan upah $9,00 per jam atau kerja borongan dengan upah sebesar $320 ditambah $3 untuk setiap jam bekerja kurang dari 40 jika mereka menyelesaikan pekerjaan kurang dari 40, jika mereka menyelesaikan pekerjaan kurang dari 40 jam. Misalkan pekerjaan akan memakan waktu t jam, Jika $t \geq 40$, pasti upah per jam lebih menguntungkan pekerja. Jika $t < 40$, berapa lama waktu t yang lebih menguntungkan dengan upah per jam?
7. Rasio lancar sebuah perusahaan mesin presisi adalah 3,8. Jika harta lancar perusahaan adalah $570000, berapakah utang lancarnya? Untuk menambah dana, berapakah jumlah maksimum yang dapat dipinjam perusahaan dalam jangka pendek agar didapat rasio lancar yang tidak kurang dari 2,6?
8. Saat ini, seorang produsen memiliki persediaan 2500 unit produk. Harga produk saat ini adalah $4 per unit. Bulan depan harga satuan tersebut akan naik $0.50. Produsen ingin memperoleh total pendapatan dari hasil penjualan 2500 unit tidak kurang dari $10750. Berapa jumlah maksimum unit yang dapat dijual dalam bulan tersebut?

3.7. Rangkuman

1. Persamaan didefinisikan sebagai pernyataan bahwa dua ekspresi adalah sama nilainya. Kedua ekspresi yang membentuk persamaan disebut sisi-sisinya. Keduanya dipisahkan oleh tanda persamaan, yaitu “=”.
2. Persamaan linear merupakan persamaan yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah 1. Ini berarti tidak ada variabel yang mempunyai pangkat 2, atau 3, atau yang lebih tinggi.
3. Persamaan kuadrat dalam variabel x adalah persamaan yang dapat dituliskan dalam bentuk :

   $ax^2 + bx + c = 0$

di mana a,b dan c adalah konstanta serta $a \neq 0$

Persamaan kuadrat juga disebut persamaan pangkat dua, karena pangkat tertinggi dari variabelnya adalah 2.

4. Metode penyelesaian persamaan kuadrat :

- **Menyelesaikan Persamaan Kuadrat Dengan Pemfaktoran.**
- Menyelesaikan Persamaan Kuadrat Dengan Rumus ABC.

5. **Pertidaksamaan** adalah suatu pernyataan bahwa salah satu jumlah lebih kecil dari atau lebih besar dari, atau lebih kecil atau sama dengan, atau lebih besar atau sama dengan jumlah lain.
6. Aturan pertidaksamaan :

- Jika suatu angka yang sama ditambahkan atau dikurangkan dari kedua sisi sebuah pertidaksamaan, maka diperoleh pertidaksamaan baru, dengan logika yang sama dengan pertidaksmaan semula. Secara simbolis dapat dinyatakan:

  Jika $a < c$, maka $a+c < b+c$ dan $a-c < b-c$

- Jika kedua sisi suatu pertidaksamaan dikalikan atau dibagikan dengan sebuah angka positif yang sama, maka diperoleh pertidaksamaan baru, dengan logika yang sama dengan pertidaksamaan semula. Secar simbolis dapat dinyatakan:

  Jika $a < b$, dan $c > 0$, maka $ac < bc$ dan $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

- Jika kedua sisi suatu pertidaksamaan dikalikan atau dibagi dengan sebuah angka negatif yang sama, maka diperoleh pertidak samaan baru, dengan logika yang berlawanan dengan pertidaksamaan semula. Secara simbolis dapat dinyatakan:

  Jika $a < b$, dan $c < 0$, maka $ac > bc$ dan $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

- Setiap sisi suatu pertidaksamaan dapat digantikan dengan sebuah ekspresi yang sama dengan dengannya. Secara simbolis dapat dinyatakan:

  Jika $a < b$, dan $a = b$, maka $c < b$

- Jika kedua sisi suatu pertidaksamaan adalah positif atau keduanya negatif, kemudian kedua sisi tersebut dibalik (dipertukarkan pembilang dan penyebutnya), maka diperoleh pertidaksamaan baru dengan logika yang berlawanan dengan pertidaksamaan semula. Secara simbolis dapat dinyatakan:

  Jika $0 < a < b$, atau $a< b < 0$, maka $\frac{1}{a}> \frac{1}{b}$

- Jika kedua sisi suatu pertidaksamaan adalah positif dan masing-masing dipangkatkan dengan angka positif yang sama, maka diperoleh pertidaksamaan baru, dengan logika yang sama dengan pertidaksamaan semula. Secara simbolis dapat dinyatakan:

  Jika $0 < a < b$, dan $n > 0$, maka $a^n < b^n$

- Jika n adalah bilangan bulat positif, peraturan ini lebih jauh menetapkan :

  Jika $0 < a < b$, maka $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

===

Pendidikan adalah senjata yang paling ampuh yang bisa Anda gunakan untuk Mengubah Dunia

(Nelson Mandela)

===

BAB IV MATRIKS

Tujuan Instruksional :

Setelah mengikuti perkuliahan dengan materi dari Bab IV, diharapkan mahasiswa mampu :

- Mendefinisikan pengertian matriks.
- Menentukan jenis-jenis matriks.
- Memberi contoh jenis-jenis matriks.
- Menentukan hasil dari operasi matriks.
- Menentukan hasil dari invers matriks.
- Menyelesaikan masalah bisnis opersional dengan menggunakan matriks .

Dalam Bab IV ini akan dibahas secara khusus mengenai pengertian matriks, operasi matriks, determinan, dan invers matriks, serta penerapannya dalam dunia bisnis. Bab 4 ini dapat digunakan selama 2 pertemuan @ 3 sks, yaitu sesuai dengan RPS Matematika Bisnis, di pertemuan 8 dan 9 di mana pertemuan 8 pembahasan mengenai matriks, jenis matriks dan operasi matriks, serta pertemuan 9 membahas tentang Invers Matriks. Keduanya tentunya dilengkapi dengan contoh soal penerapan dalam dunia bisnis.

4.1. Pengertian Matriks

Matriks adalah kumpulan angka-angka (elemen-elemen) yang disusun menurut baris dan kolom, dan berbentuk empat persegi panjang. Elemen-elemennya ditunjukkan pada baris dan kolomnya.

Nama suatu matriks dinyatakan dengan huruf besar, misalnya A, B, C, …

Jika elemennya berupa huruf, elemen tersebut biasanya dinyatakan dengan huruf kecil, misalnya a,b,c…

Ukuran matriks diberikan oleh jumlah baris (garis horizontal) dan kolom (garis vertikal) yang terdapat di dalam segi empat tersebut. Ukuran matriks sering disebut **Ordo Matriks.** Ordo matriks A yang mempunyai m baris dan n kolom, dinyatakan dengan A_{mxn}

Bentuk Umum :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A adalah matriks berukuran m x n, yang berarti matriks tersebut mempunyai jumlah baris sebanyak m, dan jumlah kolom sebanyak n.

Elemen dari suatu matriks dinyatakan dengan **alamat** nya, misalnya : a_{11} berarti elemen di baris ke 1, dan kolom ke 1, a_{mn} berarti elemen di baris ke m dan kolom ke n.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ , } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 9 & -7 \end{bmatrix}$$

Matriks A berordo 3 x 2, karena mempunyai 3 baris dan 2 kolom, sedang matriks B berorodo 1 x 4, karena mempunyai 1 baris dan 4 kolom.

Elemen baris ke 3 dan kolom ke 2 dari matriks A, adalah elemen 4, atau dapat ditulis $a_{32} = 4$, sedang elemen baris ke 1 dan kolom ke 3 dari matriks B adalah elemen 9, atau dapat ditulis $b_{13} = 9$.

4.2. Jenis - jenis Matriks

Terdapat beberapa jenis matriks, pada buku ini, akan dibahas jenis matriks yang akan digunakan dalam perhitungan di dunia bisnis.

a. Matriks Baris

Adalah matriks dengan banyaknya baris 1.

Contoh :

$A_{1x4} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ adalah matriks baris, dengan jumlah kolomnya 4.

b. Matriks Kolom

Adalah matriks dengan banyaknya kolom 1.

Contoh :

$B_{3x1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$, adalah matriks kolom, dengan jumlah barisnya 3

c. Matriks Bujur Sangkar

Adalah matriks dengan banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom.

Contoh :

$C_{3x3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ adalah matriks bujur sangkar, karena banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom yaitu 3.

d. Matriks Diagonal

Adalah matriks bujur sangkar, dimana elemen pada diagonal utamanya $\neq 0$, dan elemen selain diagonal utamanya = 0.

Elemen pada diagonal utama ialah elemen yang beralamat : a_{11}, a_{22}, a_{33}, …, a_{nn} .

Contoh :

$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, adalah matriks diagonal dengan ukuran 3x3, karena elemen pada diagonal utamanya, yaitu $d_{11} \neq 0$, $d_{22} \neq 0$, $d_{33} \neq 0$, sedangkan elemen yang lain = 0

e. Matriks Skalar

Adalah matriks bujur sangkar, dimana elemen pada diagonal utamanya $\neq 0$ dan semua elemen pada diagonal utama itu sama, sedangkan elemen elemen lain = 0

Contoh :

E = $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, adalah matriks diagonal dengan ukuran 3x3, karena elemen pada diagonal utamanya, yaitu e_{11} = e_{22} = e_{33} = -2, sedang elemen lain = 0

Matriks skalar dapat juga didefinisikan, sebagai matriks diagonal, dengan elemen pada diagonal utamanya semua sama.

f. Matriks Identitas

Adalah matriks bujur sangkar, dimana elemen pada diagonal utamanya = 1, sedangkan elemen elemen lain = 0. Matriks Identitas, selalu diberi nama dengan I.

Contoh :

I = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, adalah matriks identitas dengan ukuran 3x3, karena elemen pada diagonal utamanya, yaitu i_{11} = i_{22} = i_{3} = 1, sedang elemen lain = 0.

Matriks Identitas dapat juga didefinisikan sebagai matriks skalar , dimana elemen pada diagonal utamanya = 1.

g. Matriks Segitiga Atas.

Adalah matriks bujur sangkar, dimana elemen f_{ij} = 0, untuk i > j

Contoh :

F = $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, adalah matriks segitiga atas, karena elemen f_{21}=f_{31}=f_{32}=0

h. Matriks Segitiga Bawah

Adalah matriks bujur sangkar, dimana elemen g_{ij} = 0, untuk i < j

Contoh :

$$G = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$, adalah matriks segitiga bawah, karena elemen

$g_{12}=g_{13}=g_{23}=0$

i. Matriks Nol

Adalah matriks dimana semua elemennya nol.

Contoh :

$$H_{2x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

j. Matriks Transpose

Adalah matriks yang didapat dari matriks lain dengan cara menukar baris ke i menjadi kolom ke i, dan sebaliknya menukar baris ke j menjadi kolom ke j.

Untuk matriks J_{mxn}, maka matriks transpose : J^T_{mxn}

Contoh :

$$J_{2x3} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \text{ maka } J^T_{3x2} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -5 & 1 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

4.3. Kesamaan Matriks

Dua buah matriks dikatakan sama jika :

- ordo sama
- elemen seletak sama

Elemen seletak dari dua buah matriks artinya elemen yang mempunyai alamat sama dari dua matriks tersebut.

Contoh :

$$A_{3x2} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{4}{2} \\ 5 & 7 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, B_{3x2} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ \frac{10}{2} & 7 \\ -3 & \frac{18}{2} \end{bmatrix}, C_{2x2} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ \frac{10}{2} & 7 \end{bmatrix}$$

Matriks A = B , karena :

- ordo matriks A = ordo matriks B.
- elemen seletak sama : $a_{11}=b_{11}=-2$

  $a_{12}=b_{12}=\frac{4}{2}=2$

  $a_{21}=b_{21}=5=\frac{10}{2}$

  $a_{22}=b_{22}=7$

  $a_{31}=b_{31}=-3$

  $a_{32}=b_{32}=9=\frac{18}{2}$

Matriks $A \neq C$, karena :

- ordo matriks $A \neq$ ordo matriks C.
- karena ordo matriks tidak sama, maka elemen elemennya pasti juga tidak sama, jadi tidak perlu diselidiki.

4.4. Operasi Matriks

Secara umum, operasi matriks adalah suatu usaha untuk mendapatkan matriks baru, dari 2 atau lebih matriks yang ada.

Jenis jenis operasi matriks :

a. Penjumlahan/pengurangan dua matriks

Syarat : ordo kedua matriks sama

Cara : menjumlahkan/mengurangkan elemen yang seletak.

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, maka tentukan :

i. A + B

ii. A + C

iii. A – C

Jawab :

$$A + B = \begin{bmatrix} 5+2 & -6+(-5) & 3+2 \\ 2+4 & 4+3 & 1+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -11 & 5 \\ 6 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

A + C = tidak dapat dijumlahkan, karena ordo tidak sama.

$$A - C = \begin{bmatrix} 5-2 & -6-(-5) & 3-2 \\ 2-4 & 4-3 & 1-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

b. Perkalian skalar dengan matriks.

Syarat : -

Cara : mengalikan skalar tersebut, dengan setiap elemen yang ada.

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, maka tentukan matriks -3A

Jawab :

$$-3A = -3\begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.5 & -3.-6 & -3.3 \\ -3.2 & -3.4 & -3.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -15 & 18 & -9 \\ -6 & -12 & -3 \end{bmatrix}$$

c. Perkalian dua matriks.

Syarat : Banyaknya kolom matriks pada matriks kiri harus sama dengan banyaknya baris matriks kanan

Cara : Mengalikan setiap baris dengan kolom kemudian menjumlahkan.

Notasi : A_{mxp} $B_{pxn} = C_{mxn}$

Contoh :

$A_{2x3} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -9 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $B_{3x1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, $C_{1x4} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Tentukan : i. A x B

ii. B x C

iii. A X C

Jawab :

i. A_{2x3} x $B_{3x1} = D_{2x1}$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{bmatrix}$$, di mana :

d_{11} = mengalikan setiap elemen baris ke 1 dari matriks A, dengan setiap elemen kolom ke 1 matriks B, kemudian menjumlahkannya, sehingga $d_{11} = 5.1 + 8.5 + (-9).2 = 27$

d_{21} = mengalikan setiap elemen baris ke 2 dari matriks A, dengan setiap elemen kolom ke 1 dari matriks B, kemudian menjumlahkannya, sehinga $d_{21} = 2.1 + 1.5 + 5.\ 2 = 17$

Sehingga $D_{2X1} = \begin{bmatrix} 27 \\ 17 \end{bmatrix}$

ii. $B_{3x1} x C_{1x4} = E_{3x4}$

$$E_{3x4} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \end{bmatrix}$$, di mana :

e_{11}= mengalikan setiap elemen baris ke 1 dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 1 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{11} = 1.2 = 2$

e_{12}= mengalikan setiap elemen baris ke 1 dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 2 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{12} = 1.0 = 0$

e_{13}= mengalikan setiap elemen baris ke 1 dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 3 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{12} = 1.3 = 3$

e_{14}= mengalikan setiap elemen baris ke 1 dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 4 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{12} = 1.1 = 1$

e_{21}= mengalikan setiap elemen baris ke 2 dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 1 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{21} = 5.2 = 10$

e_{22}= mengalikan setiap elemen baris ke 2 dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 2 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{22} = 5.0 = 0$

e_{23}= mengalikan setiap elemen baris ke 2 dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 3 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{23} = 5.3 = 15$

e_{24}= mengalikan setiap elemen baris ke 2 dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 4 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{24} = 5.1 = 5$

e_{31}= mengalikan setiap elemen baris ke 3dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 1 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{31}= 2.2 = 4$

e_{32}= mengalikan setiap elemen baris ke 3 dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 2 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{32} = 2.0 = 0$

e_{33}= mengalikan setiap elemen baris ke 3 dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 3 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{33} = 2.\,3 = 6$

e_{34}= mengalikan setiap elemen baris ke 3 dari matriks B, dengan setiap elemen kolom ke 4 matriks C, kemudian menjumlahkannya, sehingga $e_{34} = 2.1 = 2$

Sehingga $E_{3x4} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 10 & 0 & 15 & 5 \\ 4 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

iii. A_{2x3} x C_{1x4} , karena banyaknya kolom matriks A adalah 3, sedang banyaknya baris matriks C adalah 1, maka matriks A dan C tidak dapat dikalikan, karena banyaknya kolom matriks A tidak sama dengan banyaknya baris matriks C.

Mengingat syarat perkalian dua matriks, maka dapat disimpulkan bahwa A x B $\neq$ B x A, karena syaratnya belum tentu dapat dipenuhi. Misalnya A_{2x3} x B_{3x1}, mungkin dilakukan, akan tetapi B_{3x1} x A_{2x3}, tidak dapat dilakukan, karena banyaknya kolom matriks B $\neq$ banyaknya baris matriks A.

4.5. Sifat sifat Operasi Matriks

Dengan menganggap bahwa ukuran matriks di bawah ini adalah sedemikian sehingga operasi yang ditunjukkan bisa dilakukan, maka sifat operasi matriks adalah :

a. A+B= B+A (hukum komutatif penjumlahan)
b. A x B $\neq$ B x A (tidak berlaku hukum komutatif perkalian)
c. A + (B+C) = (A + B) + C (hukum assosiatif penjumlahan)
d. A(BC) = (AB)C (hukum assosiatif perkalian)
e. A(B+C) = AB + AC (hukum distributif perkalian terhadap penjumlahan)
f. a(B+C) = aB + aC, dimana a adalah skalar
g. a(bC) =(ab) C, dimana a dan b adalah skalar
h. a(BC) = (aB) C =B(aC), di mana a adalah skalar

4.6. Determinan Matriks

4.6.1. Pengertian Determinan

Determinan merupakan suatu fungsi. Fungsi determinan merupakan suatu fungsi bernilai real dari suatu matriks bujur sangkar.

Determinan dinyatakan sebagai jumlah semua hasil kali dasar bertanda dari matriks bujur sangkar A.

Determinan dari sebuah matriks bujur sangkar A, dinotasikan dengan det(A), atau $|A|$

4.6.2. Menentukan nilai determinan matriks berordo 2 x 2

Jika A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, maka det(A) = $|A|$ =$a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

Contoh :

Tentukan nilai determinan dari matriks A = $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

<u>Jawab</u> : det (A) = 5 . 3 - (-4). 2 = 23

4.6.3. Menentukan nilai determinan matriks berordo 3 x 3 dengan Aturan Sarrus .

Jika B = $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$, maka menentukan nilai det(B), dilakukan dengan cara:

- Tambahkan kolom ke 1 dan ke 2 dari matriks yang hendak ditentukan nilai determinannya, sebagai kolom bayangan, sehingga determinannya menjadi :

$$\left[\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{matrix}\right]\begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{matrix}$$

- Kalikan masing masing elemen pada diagonal utama, kemudian jumlahkan, setelah itu kurangkan dengan hasil kali masing masing elemen pada diagonal yang bukan diagonal utama.

$$\left[\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{matrix}\right]\begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{matrix}$$

-     -   -   +   +   +

Sehingga: $|B|$ =$b_{11}.b_{22}.b_{33}+b_{12}.b_{23}.b_{31}+b_{13}.b_{21}.b_{32}-b_{12}.b_{21}.b_{33}-b_{11}.b_{23}.b_{32}-b_{13}.b_{22}.b_{31}$

Contoh :

Tentukan nilai determinan dari matriks B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$

<u>Jawab</u> : $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}$ = 1.5.9 + 2.6.7 + 3.(-4).(-8)-2.(-4).9-1.6.(-8)-3.5.7

= 45+84+96+72+48-105 = 240

4.6.4. Sifat sifat Determinan

a. Jika setiap elemen suatu baris atau kolom dari suatu matriks bujur sangkar A bernilai nol, maka **det (A) = 0**.

Contoh :

Jika diketahui A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -7 \end{bmatrix}$, maka tentukan det(A)

<u>Jawab</u> : Karena semua elemen pada baris ke 2 adalah 0, maka nilai dari det(A) = 0

Contoh :

Jika diketahui B = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, maka tentukan det(B)

<u>Jawab</u> : Karena semua elemen pada kolom ke 3 adalah 0, maka nilai dari det(A) = 0

b. Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka **det (A) = det (A^T).**

Contoh :

Jika diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & -7 \end{bmatrix}$, dan det(A) = 26, maka tentukan det(A^T).

<u>Jawab</u> : karena telah diketahui bahwa det(A) = 26, maka berdasar sifat b, nilai det(A^T)=det(A) = 26

c. Jika setiap elemen dari suatu baris atau kolom pada determinan dari matriks A dikalikan dengan suatu skalar k, maka k bisa dikeluarkan dari tanda determinan, atau : **det(kA) = k.det(A).**

Contoh :

Jika diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & -7 \end{bmatrix}$, dan det(A) = 26, maka tentukan det(3A).

<u>Jawab</u> : karena telah diketahui bahwa det(A) = 26, maka berdasar sifat c, nilai det(3A)=3.det(A)=3.26=78

d. Jika matriks B diperoleh dari matriks A dengan cara mempertukarkan dua baris atau dua kolom, maka **det(B) = - det(A).**

Contoh :

Jika diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & -7 \end{bmatrix}$ dan det(A) = 26, maka tentukan det (B), di mana B = $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Jawab :

Matriks B didapat dengan mempertukarkan baris ke 1 dan baris ke 3, sehingga menurut sifat d, det(B)= det(A)= -72

e. Jika dua baris atau kolom matriks A identik, maka **det(A) = 0**

Dua matriks dikatakan identik , jika suatu baris merupakan hasil kali dengan skalar k (di mana k anggota bilangan real) dari baris yang lain, atau suatu kolom merupakan hasil kali dengan skalar k (di mana k anggota bilangan real) dari kolom yang lain.

Contoh :

A = $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 10 \\ 9 & 8 & 18 \\ 4 & -1 & 8 \end{bmatrix}$, maka tentukan det (A)

Jawab :

Karena kolom ke 3, merupakan hasil dari kolom ke 1 yang dikalikan dengan skalar 2, maka dikatakan kolom ke 3 dan kolom ke 1 adalah identik. Ini berarti det(B) = 0.

Contoh :

Jika diketahui matriks B = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 4a & 4b & 4c \\ f & p & i \end{bmatrix}$, tentukan nilai dari det(B)

Jawab:

karena baris ke 2, merupakan hasil dari baris ke 1 yang dikalikan dengan skalar 4, maka det(B) =0,

f. Jika A dan B dua matriks bujur sangkar yang mempunyai ukuran sama, maka **det(AB) = det(A) det(B).**

Contoh :

Jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 2 & 8 & 9 \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, dan det(A) =-137, serta diketahui

$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 10 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ dan det(B) =-119, maka tentukan det (AB).

Jawab :

det(AB) = det(A) det(B) = =-137.-19 = 16303

4.6.5. Menentukan determinan matriks n x n dengan matriks Kofaktor

Sebelum mengenal Kofaktor, kita coba untuk memahami pengertian Minor :
Minor dari suatu matriks bujur sangkar A adalah harga determinan sub matriks yang tetap, setelah menghilangkan baris ke i dan kolom ke j. Minor dari baris ke i dan kolom ke j, dinotasikan dengan $\mathbf{M_{ij}}$.

Sebagai contoh, jika hendak ditentukan nilai dari M_{12} dari suatu matriks bujur sangkar berordo 3x3, maka harus ditentukan nilai determinan dari matriks berordo 2x2, setelah baris ke 1 dan kolom ke 2 dicoret (dihilangkan).

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 7 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, maka tentukan M_{13} dan M_{22}

Jawab :

M_{13} = nilai determinan dari matriks berordo 2x2, dengan menghilangkan baris ke 1 dan kolom ke 3 = $\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}$=-16

M_{22} = nilai determinan dari matriks berordo 2x2, dengan menghilangkan baris ke 2 dan kolom ke 2 = $\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 62$

Contoh :

Diketahui matriks B = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & -8 \\ 3 & -9 & 5 & 2 \\ -10 & -8 & -7 & -1 \\ -6 & 3 & 4 & -10 \end{bmatrix}$, maka tentukan M_{24} dan M_{13}

Jawab :

M_{24} = nilai determinan dari matriks berordo 4x4, dengan menghilangkan baris ke 2 dan kolom ke 4 = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -10 & -8 & -7 \\ -6 & 3 & 4 \end{bmatrix} = 228$

M_{13} = nilai determinan dari matriks berordo 4x4, dengan menghilangkan baris ke 1 dan kolom ke 3 = $\begin{bmatrix} 3 & -9 & 2 \\ -10 & -8 & -1 \\ -6 & 3 & -10 \end{bmatrix} = 939$

Setelah dipelajari minor, kita akan mempelajari kofaktor dari suatu matriks bujur sangkar:

Kofaktor dari suatu matriks bujur sangkar dilambangkan dengan c_{ij}, yaitu

$\mathbf{c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$

Contoh **:**

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 7 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, maka tentukan c_{13}, c_{22} dan c_{32}.

Jawab :

$c_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -16$

$c_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 62$

$c_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -(-52) = 52$

Setelah memahami cara mencari Kofaktor, maka kita akan mempelajari cari mencari determinan dari suatu matriks bujur sangkar berordo nxn, dengan menggunakan matriks kofaktor.

Mencari determinan matriks bujur sangkar A dengan matriks Kofaktor :

Terdapat 2 cara, yaitu :

Ekspansi Kofaktor sepanjang baris ke i :

$\det(A) = a_{i1}.c_{i1} + a_{i2}\, c_{i2} + \dots + a_{in}\, c_{in}$

Ekspansi Kofaktor sepanjang kolom ke j :

$\det(A) = a_{1j}.c_{1j} + a_{2j}\, c_{2j} + \dots + a_{nj}\, c_{nj}$

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 7 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, tentukan determinan matriks A dengan berdasar Ekspansi Kofaktor sepanjang baris ke 2 dan kolom ke 3

<u>**Jawab**</u> :

Menentukan nilai determinan A berdasar Ekspansi Kofaktor sepanjang baris ke 2 :

$\det(A) = a_{21}.c_{21} + a_{22}\, c_{22} + a_{23}\, c_{23}$

$= 7.\ (-1)^3\, M_{21} + 1.\ (-1)^4\, M_{22} + 9.\ (-1)^5\, M_{23}$

$= -7. \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + (-9) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}$

$= -7.\ 54 + 62 + (-9)\ .14$

$= -442$

Menentukan nilai determinan A berdasar Ekspansi Kofaktor sepanjang kolom ke 3:

$\det(A) = a_{13}.c_{13} + a_{23}\, c_{23} + a_{33}\, c_{33}$

$= 10.\ (-1)^4\, M_{13} + 9.\ (-1)^5\, M_{23} + 6.\ (-1)^6\, M_{33}$

$= 10. \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} + (-9) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} + 6. \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$

$= \quad 10.(-16) + (-9).14 + 6.(-26)$

$= \quad -442$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa menentukan nilai determinan dari suatu matriks, boleh dipilih berdasar ekspansi baris maupun kolom manapun. Ini berarti, jika pada matriks yang akan ditentukan nilai determinannya mengandung satu baris atau kolom yang mengandung angka nol, sebaiknya dipilih berdasar baris atau kolom tersebut, karena akan mempersingkat perhitungan ($a_{ij} = 0$, sehingga $a_{ij}.c_{ij} = 0$).

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 7 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, tentukan nilai det(A)

<u>**Jawab**</u> :

Untuk menentukan nilai dari determinan matriks A ini, sebaiknya diekspansikan berdasar baris ke 1, karena pada baris itulah terbanyak terdapat angka 0, sehingga:

$\det(A) = a_{11}.c_{11} + a_{12}\,c_{12} + a_{13}\,c_{13}$

$= 0.c_{11} + 0.\,c_{12} + 10.\,c_{13}$

$= 0 + 0 + 10.\,(-1)^4\,M_{13}$

$= 10.\ M_{13} = 10.\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 10.\,(-16) = -160$

4.7. Invers Matriks

4.7.1. Pengertian Invers Matriks

Jika A dan B adalah matriks bujur sangkar berordo sama, dan berlakulah A.B = B.A = I, maka dikatakan **$A = B^{-1}$**, dan **$B = A^{-1}$**, atau dibaca **: A adalah invers dari B**, dan sebaliknya **B adalah invers dari A.**

Contoh : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Maka dikatakan, A adalah invers dari B, dan B adalah invers dari A, karena

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$B.A = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

4.7.2. Sifat sifat Invers Matriks

Jika A adalah matriks bujur sangkar yang mempunyai invers, maka :

a. $(A^{-1})^{-1} = A$

b. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$, di mana $n \in B^+$

c. $(kA)^{-1} = \frac{1}{\mathbf{k}} A^{-1}$, dimana k = skalar, $k \in R$, $k \neq 0$

d. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

e. $(A.B)^{-1} = B^{-1}. A^{-1}$

4.7.3. Mencari Invers Matriks berordo 2 x 2

Jika $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{bmatrix}$, maka $A^{-1} = \frac{1}{\mathbf{a}_{11}.\mathbf{a}_{22} - \mathbf{a}_{12}.\mathbf{a}_{21}} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{22} & -\mathbf{a}_{12} \\ -\mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{11} \end{bmatrix}$, dimana det(A) =

$\mathbf{a}_{11}.\mathbf{a}_{22} - \mathbf{a}_{12}.\mathbf{a}_{21} \neq 0$

Dari rumus di atas, dapat diketahui bahwa **tidak** setiap matriks bujur sangkar mempunyai invers. Matriks bujur sangkar tidak mempunyai invers, jika nilai determinannya sama dengan nol.

Contoh :

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, maka tentukan A^{-1}

Jawab :

$$A^{-1} = \frac{1}{1.0 - 2.3} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Untuk mengetahui kebenaran dari perhitungan kita, maka dapat dilihat dengan cara
mengalikan matriks A dengan matriks A^{-1}, apakah menjadi matriks Identitas atau tidak. Jadi, kita tentukan A. A^{-1} = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$=I

4.7.4. Mencari Invers Matriks berordo n x n dengan Matriks Kofaktor

Jika A adalah matriks bujur sangkar berordo n x n, maka :

$$\boxed{\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\,\mathbf{adj\ A}}$$

adj A = adjoint dari matriks bujur sangkar A = $(C_A)^T$

$C_A = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$, dimana $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Syarat : det (A) $\neq 0$

Untuk mencari invers matriks, syarat bahwa determinan matriks $\neq 0$, harus diselidiki terlebih dahulu, karena jika det = 0, maka dapat disimpulkan bahwa matriks tersebut tidak mempunyai Invers.

Contoh 1 :

Tentukan A^{-1} dari matriks A = $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$

Jawab :

Untuk mencari invers matriks A, selidiki terlebih dahulu det(A). Setelah dihitung, ternyata det(A) = 0, sehingga, dapat disimpulkan bahwa A^{-1} tidak ada, tanpa perlu ditentukan matriks adjointnya.

Contoh 2 :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$, maka tentukan matriks B^{-1}

Jawab :

Karena det(B) = -2, det (B) $\neq$ 0, maka dicari matriks adjoint dari matriks B, dengan cara mencari matriks Kofaktornya terlebih dahulu:

$c_{11} = (-1)^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$

$c_{12} = (-1)^3 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

$c_{13} = (-1)^4 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -1$

$c_{21} = (-1)^3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1$

$c_{22} = (-1)^4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

$c_{23} = (-1)^5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -1$

$c_{31} = (-1)^4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1$

$c_{32} = (-1)^5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -2$

$c_{33} = (-1)^6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1$

$$C_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \ \text{adj}(B) = C_B^{\ T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

4.8. Menentukan Operasi Matriks, Determinan Dan Invers Matriks Dengan Excel

Setelah kita mengetahui tentang Operasi Matriks, menentukan determinan dan invers matriks secara manual, maka kita akan mencoba untuk menggunakan alat bantu untuk menentukannya. Terdapat beberapa alat bantu yang dapat digunakan untuk menentukan penjumlahan, pengurangan, perkalian matriks dengan skalar, perkalian dua matriks, menentukan determinan dan invers matriks, diantaranya adalah dengan MatLab, atau dengan MS Excel. Namun, pada buku ini akan dibahas dengan MS Excel, yaitu *software* yang cukup sederhana, karena telah umum digunakan.

4.8.1. Menentukan Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Contoh 1 :

Jumlahkan matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ dengan matriks B = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ dengan menggunakan MS Excel.

Jawab :

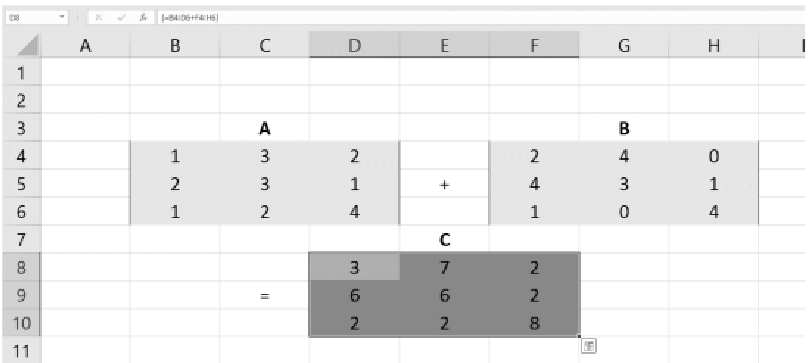
Perhatikan langkah demi langkah :

1 Tuliskan matriks ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B4:D6 dan matriks B ditulis di F4:H6).

2 Ambil range yang akan dipakai untuk menempelkan hasil penjumlahan (misal ditulis di D8:F10).

3 Perhatikan *capture* berikut ini :

4 Kemudian masukan rumus berikut "=B4:D6+F4:H6" pada *range* yang telah disediakan atau bisa dengan memblok *range* yang akan dijumlahkan, kemudian tekan kombinasi tombol Ctrl + Shift + Enter, maka hasil penjumlahan akan terlihat di range D8:F10, seperti tampak pada gambar di bawah ini :



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3			A				B	
4		1	3	2		2	4	0
5		2	3	1	+	4	3	1
6		1	2	4		1	0	4
7					C			
8				3	7	2		
9			=	6	6	2		
10				2	2	8		
11								

5. Ini berarti hasil dari penjumlahan matriks A dan B adalah matriks C = $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 6 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

Contoh 2 :

Kurangkan matriks A = $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ dengan matriks B = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ dengan menggunakan MS Excel.

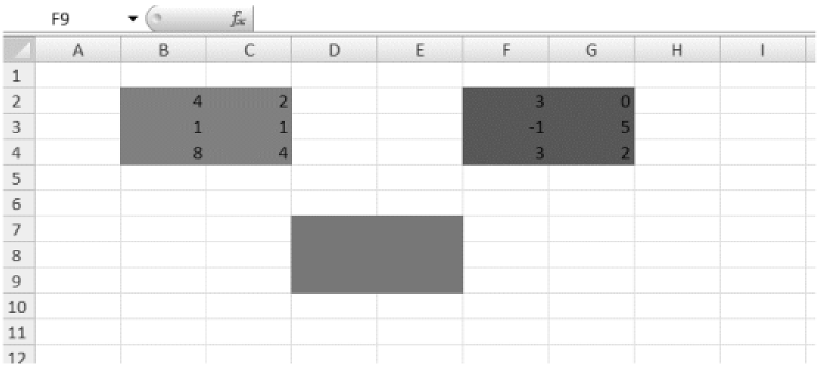
Jawab :

Perhatikan langkah demi langkah :

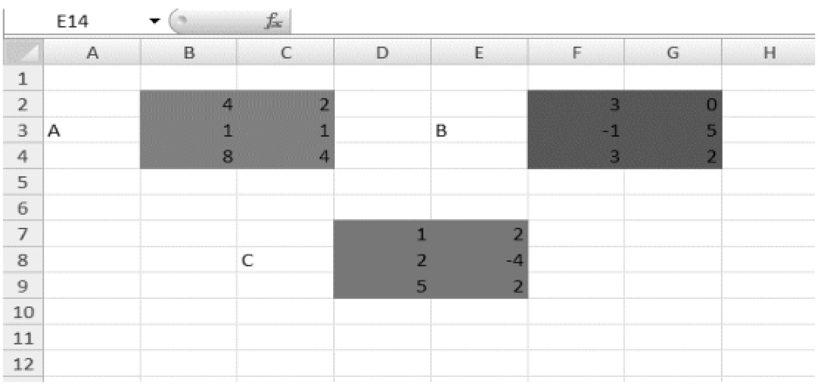
1 Tuliskan matriks ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:C4 dan matriks B ditulis di F2:G4).

2 Ambil range yang akan dipakai untuk menempelkan hasil pengurangan (misal ditulis di D7:E9).

3 Perhatikan *capture* berikut ini :



4 Kemudian masukan rumus berikut "=B2:C4-F2:G4" pada *range* yang telah disediakan atau bisa dengan memblok *range* yang akan dijumlahkan, kemudian tekan kombinasi tombol Ctrl + Shift + Enter, maka hasil penjumlahan akan terlihat di range D7:E9, seperti tampak pada gambar di bawah ini :



Contoh 3 :

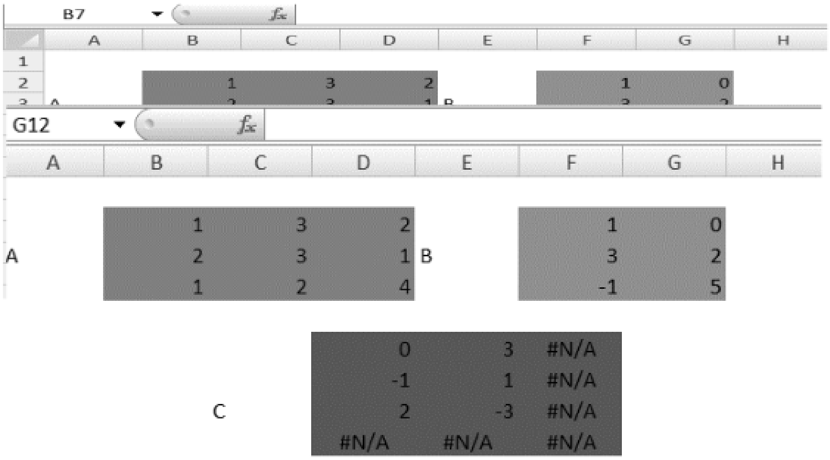
Jumlahkan matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ dengan matriks B = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ dengan menggunakan MS Excel.

Jawab :

1 Tuliskan matriks ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D4 dan matriks B ditulis di F2:G4).

2 Ambil range yang akan dipakai untuk menempelkan hasil penjumlahan (misal ditulis di D6:F9).

3 Perhatikan *capture* berikut ini :



4. Setelah dilakukan langkah seperti pada contoh 1 dan contoh 2, maka akan nampak hasil :

   Hasil di atas terjadi karena antara matriks A dan matriks B tidak mempunyai ordo yang sama.

4.8.2. Menentukan Perkalian Antara Skalar dengan Matriks

Untuk menentukan perkalian antara skalar dengan matriks, maka langkah yang ditempuh hampir sama dengan pada waktu penjumlahan atau pengurangan matriks.

Contoh 1 :

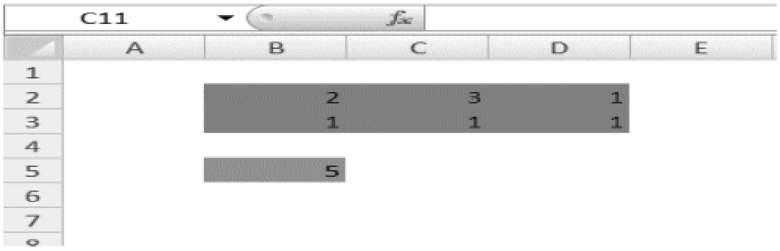
Jika diketahui skalar k = 5 dan matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ dan tentukan matriks 5A dengan menggunakan MS Excel

Jawab :

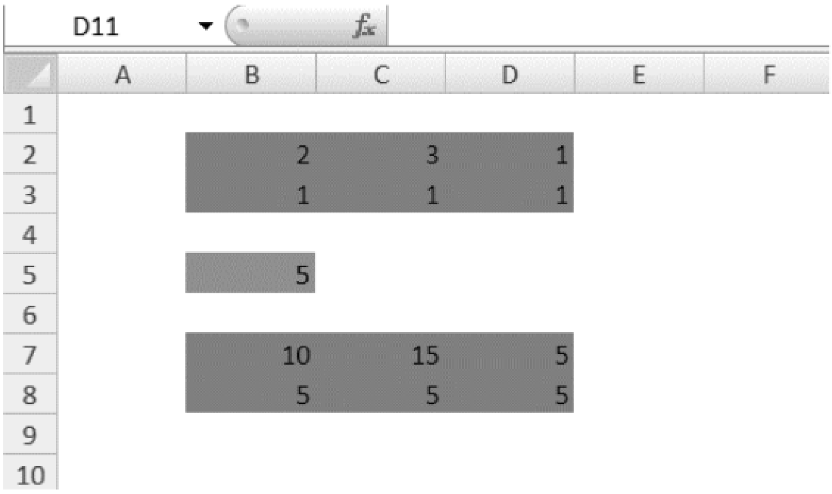
1 Tuliskan skalar dan matriks ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D3 dan skalar ditulis pada range B5).

2 Ambil range yang akan dipakai untuk menempelkan hasil perkalian (misal ditulis di B6:D8).

3 Perhatikan *capture* berikut ini :



4. Kemudian masukan rumus berikut "=B5*B2:D3" pada *range* yang telah disediakan atau bisa dengan memblok *range* yang akan dikalikan, kemudian tekan kombinasi tombol Ctrl + Shift + Enter, maka hasil penjumlahan akan terlihat di range B7:D8, seperti tampak pada gambar di bawah ini :



195. Jadi hasilnya adalah B = $\begin{bmatrix} 10 & 15 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

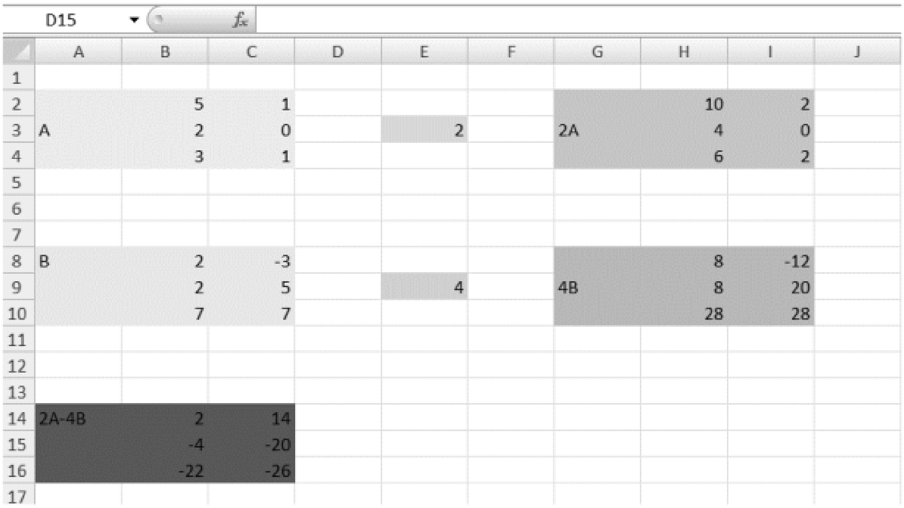
Contoh 2 :

Jika diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$ maka tentukan 2A – 4B dengan menggunakan MS Excel

Jawab :

Untuk menentukan matriks 2A – 4B maka langkah yang harus dilakukan adalah :

1. Tuliskan matriks A dan skalar 2, kemudian tentukan matriks 2A
2. Tuliskan matriks B dan skalar 4, kemudian tentukan matriks 4B
3. Tentukan 2A – 4B
4. Perhatikan *capture* di bawah ini :



D15

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		5	1					10	2	
3	A	2	0		2		2A	4	0	
4		3	1					6	2	
5										
6										
7										
8	B	2	-3					8	-12	
9		2	5		4		4B	8	20	
10		7	7					28	28	
11										
12										
13										
14	2A-4B	2	14							
15		-4	-20							
16		-22	-26							
17										

5. Sehingga hasil yang terjadi adalah :

2A – 4B = $\begin{bmatrix} 2 & 14 \\ -4 & -20 \\ -22 & -26 \end{bmatrix}$

4.8.3. Menentukan perkalian dua matriks.

Contoh 1 :

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka tentukan A.B dengan menggunakan MS Excel

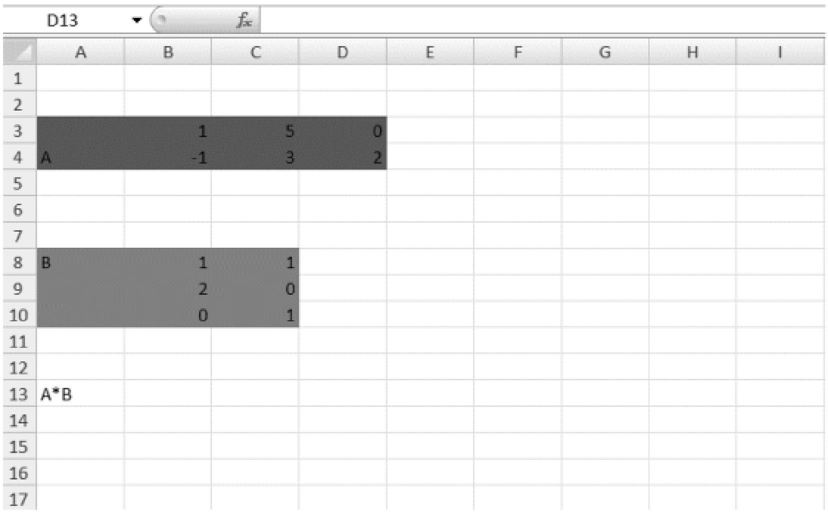
Jawab :

Untuk menentukan matriks A. B maka yang harus dilakukan adalah :

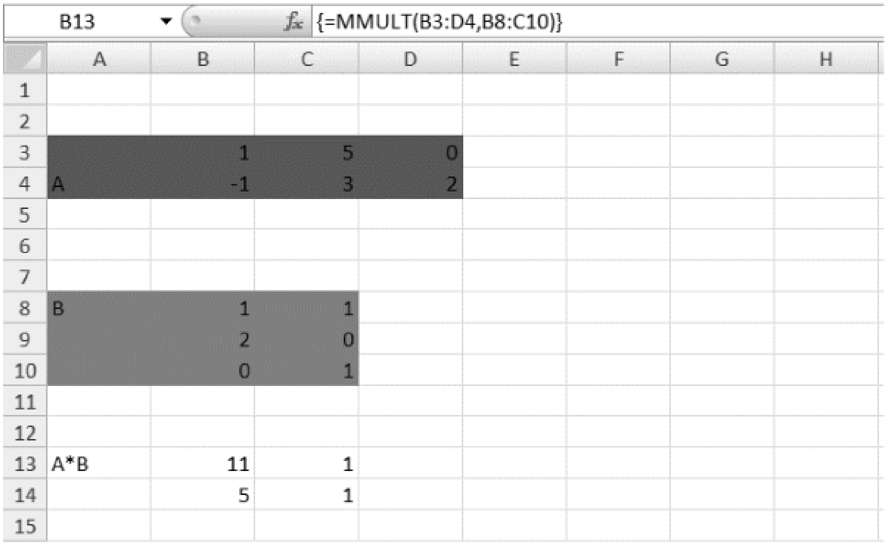
1 Tuliskan skalar dan matriks ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D4 dan matriks B ditulis dalam range B8:C10).

2 Ambil range yang akan dipakai untuk menempelkan hasil perkalian (misal ditulis di B13:C14).

3 Perhatikan *capture* berikut ini :



4. Menentukan hasil dengan menggunakan perintah =MMULT(array1,array2) , dimana array1 adalah matriks A dan array 2 adalah matriks B, sehingga hasilnya seperti pada *capture* di bawah ini :


B13 | {=MMULT(B3:D4,B8:C10)}

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3		1	5	0				
4	A	-1	3	2				
5								
6								
7								
8	B	1	1					
9		2	0					
10		0	1					
11								
12								
13	A*B	11	1					
14		5	1					
15								

5. Hasil dari perkalian matriks A dan B adalah : $\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

Contoh 2 :

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan C = $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}$ maka tentukan 2A x 3B + 4C dengan menggunakan MS Excel

Jawab :

Untuk menentukan matriks 2A x 3B + 4C maka langkah yang harus dilakukan adalah :

1. Tuliskan matriks A, kemudian tentukan matriks 2A
2. Tuliskan matriks B, kemudian tentukan matriks 3B
3. Tentukan matriks C, kemudian tentukan matriks 4C
4. Tentukan matriks 2A x 3B
5. Tentukan matriks 2A x 3B + 4C
6. Perhatikan *capture* di bawah ini :

F23

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2											
3	A	2	1	7			2A	4	2	14	
4		1	2	3				2	4	6	
5		3	1	5				6	2	10	
6											
7											
8											
9	B	3					3B	9			
10		2						6			
11		1						3			
12											
13											
14	C	-3					4C	-12			
15		0						0			
16		15						60			
17											
18											
19	2A * 3B	90									
20		60									
21		96									
22											
23	2A * 3B +4C		78								
24			60								
25			156								
26											

4.8.4. Menentukan Transpose Matriks

Contoh 1 :

Tentukan transpose dari matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dengan menggunakan MS Excel

Jawab :

1. Tuliskan skalar dan matriks ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B3:C5).
2. Ambil range yang akan dipakai untuk menempelkan hasil tranpose (misal ditulis di B8:D9).
3. Perhatikan *capture* berikut ini :

C10

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3	A	1	-1					
4		3	2					
5		1	2					
6								
7								
8	AT							
9								
10								

4. Pada range yang telah disiapkan, diketikkan formula : **=TRANSPOSE (B3:C5),** kemudian tekan tombol CTRL SHIFT ENTER sehingga hasilnya adalah :

D12

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	A	1	-1				
4		3	2				
5		1	2				
6							
7							
8	AT	1	3	1			
9		-1	2	2			
10							

Contoh 2 :

Jika diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, matriks B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan matriks C = $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, maka tentukan matriks $(3A \times 4B + 5C)^T$ dengan menggunakan MS Excel.

Jawab :

Untuk menentukan matriks $(3A \times 4B + 5C)^T$ maka langkah yang harus dilakukan adalah :

1. Tuliskan matriks A, kemudian tentukan matriks 3A
2. Tuliskan matriks B, kemudian tentukan matriks 4B
3. Tentukan matriks C, kemudian tentukan matriks 5C
4. Tentukan matriks 3A x 4B
5. Tentukan matriks $(3A \times 4B + 5C)^T$
6. Perhatikan *capture* di bawah ini :

G21

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	A	5	1	3		3A	15	3	9		
2		2	0	1			6	0	3		
3		1	1	1			3	3	3		
4											
5											
6	B	2	1			4B	8	4			
7		2	0				8	0			
8		3	2				12	8			
9											
10											
11	C	4	2			5C	20	10			
12		1	-1				5	-5			
13		2	0				10	0			
14											
15											
16	3A*4B	252	132								
17		84	48								
18		84	36								
19											
20	3A*4B+5C	272	142								
21		89	43								
22		94	36								
23											
24											

4.8.5. Menentukan Determinan Matriks

Contoh 1:

Tentukan nilai determinan matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ dengan menggunakan MS Excel

Jawab :

Untuk menentukan determinan matriks A, dapat dilakukan dengan langkah berikut :

1 Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D4)

2 Ambil range yang akan dipakai untuk menempelkan nilai determinan (misalkan cell B7)

3 Tuliskan formula : **=mdeterm(array)** pada cell yang telah disediakan, lalu tekan enter, hingga menghasilkan nilai dari determinan matriks A

4 Perhatikan *capture* berikut :

B7 =MDETERM(B2:D4)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		2	-1	0			
3	A	5	3	2			
4		1	1	4			
5							
6							
7		38					
8							

5. Jadi hasil dari determinan matriks A adalah 38

Contoh 2 :

Jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$ maka tentukan nilai determinan dari matriks B x A

Jawab :

1. Tuliskan matriks A,
2. Tuliskan matriks B,
3. Tentukan matriks B x A,
4. Tentukan determinan matriks B x A

B9 | f_x | {=MMULT(B5:B7,B3:D3)}

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	A	2	7	5			
4							
5	B	1					
6		-2					
7		7					
8							
9	Bx A	2	7	5			
10		-4	-14	-10			
11		14	49	35			
12							
13							

4.8.6. Menentukan Invers dari suatu matriks

Contoh 1 :

Jika diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -4 & 14 & -10 \\ 14 & 35 & 23 \end{bmatrix}$, maka tentukan invers dari matriks A

Jawab :

Untuk menentukan invers dari matriks A, maka dapat dilakukan dengan langkah berikut :

1 Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D4).

2 Ambil range yang akan dipakai untuk menempelkan matriks inverse (misalkan range B9:D11).

3 Pada range yang akan digunakan untuk menentukan inverse, tuliskan formula : =minverse(array), kemudian tekan ctrl shift enter, sehingga hasilnya menjadi :

E9

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3							
4	A	2	5	5			
5		-4	14	-10			
6		14	35	23			
7							
8							
9		-1.16667	-0.10417	0.208333			
10	Inverse A	0.083333	0.041667	0			
11		0.583333	0	-0.08333			
12							

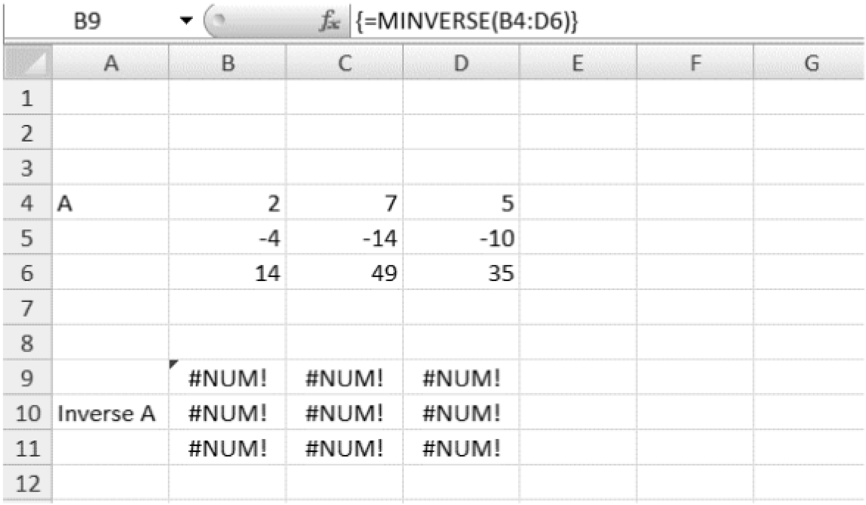
Contoh 2 :

Jika diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ -4 & -14 & -10 \\ 14 & 49 & 35 \end{bmatrix}$, maka tentukan invers dari matriks A

Jawab :

Untuk menentukan invers dari matriks A, maka dapat dilakukan dengan langkah berikut :

1. Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D4).
2. Ambil range yang akan dipakai untuk menempelkan matriks inverse (misalkan range B9:D11).
3. Pada range yang akan digunakan untuk menentukan inverse, tuliskan formula : =minverse(array), kemudian tekan ctrl shift enter, sehingga hasilnya menjadi :



B9 | f_x {=MINVERSE(B4:D6)}

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3							
4	A	2	7	5			
5		-4	-14	-10			
6		14	49	35			
7							
8							
9		#NUM!	#NUM!	#NUM!			
10	Inverse A	#NUM!	#NUM!	#NUM!			
11		#NUM!	#NUM!	#NUM!			
12							

Hasil dari inverse tidak ada, karena ternyata determinan dari matriks $A = 0$

4.8.7. Rangkuman

Rangkuman dari setiap operasi, disajikan pada tabel di bawah ini:

Tabel 4.1. Rangkuman Operasi Matriks

No	**Operasi Matriks**	**Formula**	**Eksekusi Hasil**
1.	Penjumlahan dan Pengurangan Matriks	= array1+ array 2 = array1- array 2	Blok range yang dituju, kemudian tekan ctrl shift enter
2.	Perkalian skalar (k) dengan matriks	= k* array	Blok range yang dituju, kemudian tekan ctrl shift enter
3.	Perkalian dua matriks	=mmult(array1,array2)	Blok range yang dituju, kemudian tekan ctrl shift enter
4.	Transpose matriks	=transpose(array)	Blok range yang dituju, kemudian tekan ctrl shift enter
5.	Determinan matriks	=mdeterm(array)	Blok range yang

No	Operasi Matriks	Formula	Eksekusi Hasil
			dituju, kemudian tekan enter
6.	Inverse matriks	=minverse(array)	Blok range yang dituju, kemudian tekan ctrl shift enter

4.8.8. Latihan

1. Jika diketahui : A = $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

C = $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, D = $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ E = $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Maka tentukan hasil operasi matriks di bawah ini dengan MS Excel. Jika tidak ada hasilnya, maka sebutkan mengapa tidak ada hasilnya.

a. AB	d. DE	g. 3C – D	j. A(BC)
b. D+E	e. ED	h. (3E)D	k. (4B)C + 2B
c. D – E	f. –7b	i. (AB)C	l. D + E^2

2. Tentukan nilai dari determinan dan invers dari matriks B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$ dengan MS Excel.

3. Tentukan invers dari matriks C = $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$ dengan MS Excel.

4.9. Rangkuman

1. **Matriks** adalah kumpulan angka-angka (elemen-elemen) yang disusun menurut baris dan kolom, dan berbentuk empat persegi panjang. Elemen-elemennya ditunjukkan pada baris dan kolomnya.
2. Jenis - jenis Matriks :

- Matriks Baris adalah matriks dengan banyaknya baris 1.
- Matriks Kolom adalah matriks dengan banyaknya kolom 1.
- Matriks bujur sangkar adalah matriks dengan banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom.
- Matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar, dimana elemen pada diagonal utamanya $\neq 0$, dan elemen selain diagonal utamanya = 0.
- Matriks scalar adalah matriks bujur sangkar, dimana elemen pada diagonal utamanya $\neq 0$ dan semua elemen pada diagonal utama itu sama, sedangkan elemen elemen lain = 0. Matriks skalar dapat juga didefinisikan, sebagai matriks diagonal, dengan elemen pada diagonal utamanya semua sama.
- Matriks identitas adalah matriks bujur sangkar, dimana elemen pada diagonal utamanya = 1, sedangkan elemen elemen lain = 0. Matriks Identitas, selalu diberi nama dengan I.
- Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar, dimana elemen $f_{ij} = 0$, untuk $i > j$.
- Matriks segitiga bawah matriks bujur sangkar, dimana elemen $g_{ij} = 0$, untuk $i < j$
- Matriks nol adalah matriks dimana semua elemennya nol.
- Matriks transpose Adalah matriks yang didapat dari matriks lain dengan cara menukar baris ke i menjadi kolom ke i, dan sebaliknya menukar baris ke j menjadi kolom ke j.

3. Dua buah matriks dikatakan sama bila memiliki ordo yang sama dan elemen seletak yang sama. Elemen seletak dari dua buah matriks artinya elemen yang mempunyai alamat sama dari dua matriks tersebut.
4. Operasi matriks adalah suatu usaha untuk mendapatkan matriks baru, dari 2 atau lebih matriks yang ada. Jenis-jenis operasi matriks :

- Penjumlahan/pengurangan dua matriks. Syaratnya adalah ordo kedua matriks harus sama.
- Perkalian skalar dengan matriks.
- Perkalian dua matriks. Syaratnya adalah banyaknya kolom matriks pada matriks kiri harus sama dengan banyaknya baris matriks kanan.

5. Sifat-sifat operasi matriks :

- $A+B= B+A$ (hukum komutatif penjumlahan)
- $A \times B \neq B \times A$ (tidak berlaku hukum komutatif perkalian)
- $A + (B+C) = (A + B) + C$ (hukum assosiatif penjumlahan)
- $A(BC) = (AB)C$ (hukum assosiatif perkalian)
- $A(B+C) = AB + AC$ (hukum distributif perkalian terhadap penjumlahan)
- $a(B+C) = aB + aC$, dimana a adalah skalar
- $a(bC) =(ab) C$, dimana a dan b adalah skalar
- $a(BC) = (aB) C =B(aC)$, di mana a adalah skalar

6. Determinan merupakan suatu fungsi. Fungsi determinan merupakan suatu fungsi bernilai real dari suatu matriks bujur sangkar. Determinan dinyatakan sebagai jumlah semua hasil kali dasar bertanda dari matriks bujur sangkar A. Determinan dari sebuah matriks bujur sangkar A, dinotasikan dengan det(A), atau $|A|$.
7. Sifat-sifat Determinan :

- Jika setiap elemen suatu baris atau kolom dari suatu matriks bujur sangkar A bernilai nol, maka **det (A) = 0**.
- Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka **det (A) = det (A^T).**
- Jika setiap elemen dari suatu baris atau kolom pada determinan dari matriks A dikalikan dengan suatu skalar k, maka k bisa dikeluarkan dari tanda determinan, atau : **det(kA) = k.det(A).**
- Jika matriks B diperoleh dari matriks A dengan cara mempertukarkan dua baris atau dua kolom, maka **det(B) = - det(A).**
- Jika dua baris atau kolom matriks A identik, maka **det(A) = 0**
- Jika A dan B dua matriks bujur sangkar yang mempunyai ukuran sama, maka **det(AB) = det(A) det(B).**

8. Jika A dan B adalah matriks bujur sangkar berordo sama, dan berlakulah A.B = B.A = I, maka dikatakan **$A = B^{-1}$**, dan **$B = A^{-1}$**, atau dibaca **: A adalah invers dari B**, dan sebaliknya **B adalah invers dari A.**
9. Sifat-sifat inver matriks :

   Jika A adalah matriks bujur sangkar yang mempunyai invers, maka :

f. $(A^{-1})^{-1} = A$

g. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$, di mana $n \in B^+$

h. $(kA)^{-1} = \frac{1}{\mathbf{k}} A^{-1}$, dimana k = skalar, $k \in R$, $k \neq 0$

i. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

j. $(A.B)^{-1} = B^{-1}.\ A^{-1}$

4.10. Latihan Soal Mandiri

1. Suatu toko menjual 125 kaleng sup tomat, 275 kaleng kacang, dan 400 kaleng tuna. Buatlah matriks baris yang memuat angka dari setiap barang yang dijual. Apabila masing-masing dihargai \$0.95, \$1.03 dan \$1.25 , tuliskan sebagai matriks kolom yang memuat angka dari setiap harga. Jika seluruh barang terjual habis, berapa penghasilan toko tersebut ? Kerjakan dengan matriks.
2. Widget Company memuat laporan penjualan bulanannya dengan menggunakan matriks yang bagian barisnya menunjukkan secara berurutan, jumlah model regular, deluxe, dan eksterm yang dijualnya, dan kolomnya menunjukkan jumlah unit, secara berurutan, berwarna merah, putih, biru dan ungu yang dijual. Matriks untuk bulan Januari dan Februari masing-masing adalah :

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   a Berapa banyak model ekstrem putih yang dijualpada bulan Januari?
   b Berapa banyak model deluxe biru yang dijual pada bulan Februari?
   c Pada bulan apakah model regular ungu lebih banyak dijual?
   d Model dan warna manakah yang memiliki jumlah penjualan yang sama di kedua bulan?
   e Bulan manakah model deluxe lebih banyak dijual?
   f Bulan manakah unit berwarna merah lebih banyak dijual?
   g Berapa banyak widget yang terjual di bulan Januari?
3. **Matriks Input-Output.** Matriks Input-Output, yang dikembangkan oleh W.W. Leontief, mengindikasikan adanya interrelasi yang terjadi antara beragam sektor ekonomi selama periode tertentu. Contoh hipotesis dari suatu perekonomian sederhana dinyatakan dalam matriks M. Sektor konsumsi berimbang dengan sektor produksi dan dapat dianggap sebagai sektor manufaktur, pemerintah, baja, pertanian, rumah tangga dan sebagainya. Setiap

baris menunjukkan bagaimana output dari sektor yang ada dikonsumsi oleh empat sektor. Sebagai contoh, total output Industri A, 50 untuk industri A sendiri, 70 untuk B, 200 untuk C, dan 360 untuk lainnya. Jumlah entri pada baris 1, yaitu 680, menjadi total output A pada periode tersebut. Setiap kolom memberikan jumlah output pada setiap sektor yang dikonsumsi oleh sektor tertentu. Sebagai contoh untuk memproduksi 680 unit, industri A mengonsumsi 50 unit A, 90 unit B, 120 unit C, dan 420 dari seluruh produsen lain. Untuk setiap kolom, carilah jumlah entrinya. Lakukan juga untuk setiap baris. Apa yang kita amati dari perbandingan total angka tersebut. Anggaplah sektor A meningkatkan outputnya sebesar 20% atau sekitar 136 unit. Dengan mengasumsikan bahwa hasil ini terjadi akibat peningkatan 20% pada seluruh input secara seragam, berapa banyak unit yang harus ditingkatkan sektor B untuk menambah outputnya? Jawablah pertanyaan yang sama untuk sektor C dan produsen lain.

Matriks M :

Produsen/Konsumen	Industri A	Industri B	Industri C	Seluruh konsumen lain
Industri A	50	70	200	360
Industri B	90	30	270	320
Industri C	120	240	100	1050
Seluruh konsumen lain	420	370	940	4960

4. Berat badan Bob adalah 178 pon. Dia ingin mengurangi berat badannya melalui satu rencana diet dan latihan fisik. Sesudah mencari keterangan dari Tabel 1 dia membuat jadwal latihan fisik seperti dalam Tabel 2. Berapa kalori yang akan terbakar dengan melakukan latihan fisik setiap hari jika dia mengikuti rencana ini ?

Tabel 1				
KALORI YANG TERBAKAR SETIAP JAM				
Aktivitas latihan	Berat dalam lb			
	152	161	170	178
Jalan kaki 2 mil/jam	213	225	237	249
Lari 5,5 mil/jam	651	688	726	764
Bersepeda 5,5 mil/jam	304	321	338	356
Tenis (secukupnya)	420	441	468	492

Tabel 2				
JUMLAH JAM PER HARI UNTUK SETIAP AKTIVITAS				
	Jadwal latihan			
	Jalan	Lari	Bersepeda	Tenis
Senin	1,0	0,0	1,0	0,0
Selasa	0,0	0,0	0,0	2,0
Rabu	0,4	0,5	0,0	0,0
Kamis	0,0	0,0	0,5	2,0
Jumat	0,4	0,5	0,0	0,0

5. Suatu perusahaan menghasilkan tiga produk. Biaya produksinya dibagi dalam 3 kategori. Pada setiap kategori ini, diberikan suatu taksiran untuk biaya produksi suatu barang dari masing masing produk. Dibuat juga suatu taksiran untuk jumlah dari masing masing produk yang akan dihasilkan untuk setiap kuartal. Taksiran taksiran ini diberikan dalam tabel 1 dan 2 di bawah ini. Perusahaan tersebut ingin menyajikan pada rapat pemegang saham satu tabel yang menunjukkan biaya total untuk setiap kuartal dalam masing masing dari ketiga kategori: bahan mentah, tenaga kerja dan biaya tambahan (overhead).

TABEL 1			
BIAYA PRODUKSI PER BARANG (dollar)			
BIAYA	Produk		
	A	**B**	**C**
Bahan mentah	0.1	0.3	0.15
Tenaga Kerja	0.3	0.4	0.25
Biaya tambahan	0.1	0.2	0.15

TABEL 2				
JUMLAH YANG DIHASILKAN PER KUARTAL				
PRODUK	MUSIM			
	PANAS	**GUGUR**	**DINGIN**	**SEMI**
A	4000	4500	4500	4000
B	2000	2600	2400	2200
C	5800	6200	6000	6000

6. Pada suatu kota, 30 persen dari wanita yang sudah menikah mengalami perceraian setiap tahun, dan 20 persen dari gadis menikah setiap tahun. Di kota tersebut, terdapat 8000 wanita yang sudah menikah, dan 2000 gadis. Dengan mengasumsikan bahwa populasi total para wanita tetap konstan, berapa wanita yang sudah menikah dan berapa gadis yang ada sesudah 1 tahun? Sesudah 2 tahun?
7. Andaikan suatu kota besar mempunyai penduduk dengan jumlah tetap sebesar 1 juta. Kota besar ini terdiri dari pusat kota dan pinggiran kota. Kita akan menganalisa perubahan dari jumlah penduduk ini. Andaikan C_n merupakan jumlah penduduk di pusat kota pada akhir tahun ke-n, dan S_n merupakan jumlah penduduk di pinggiran kota pada akhir tahun ke n. Jumlah penduduk kota besar itu dapat ditulis sebagai vektor :

$$p_n = \begin{bmatrix} C_n \\ S_n \end{bmatrix}$$

Misalkan untuk setiap tahun, 15% dari penduduk pusat kota pindah ke pinggiran, dan 10% dari pinggiran kota pindah ke pusat kota. Dengan mengasumsikan penduduk pusat kota pada awalnya adalah 700 dan penduduk pinggiran kota pada awalnya adalah 300, maka tentukan penduduk pusat kota dan pinggiran kota pada akhir tahun ke 2, akhir tahun ke 3, akhir tahun ke 4, akhir tahun ke 30, akhir tahun ke 40, akhir tahun ke 50!

8. Suatu toko hewan peliharaan memiliki stok 6 anak kucing, 10 anak anjing dan 7 burung nuri. Jika harga setiap anak kucing adalah $55, anak anjing $150, dan burung nuri $35, carilah nilai total dari persediaan toko tersebut dengan menggunakan perkalian matriks.

9. Seorang pialang saham menjual 200 lembar sahamA, 300 lembar saham B, 500 lembar saham C, dan 250 lembar saham D. Harga masing-masing saham A,B,C, dan D adalah $100,$150,$200 dan $300. Dengan menggunakan perkalian matriks, carilah biaya total penjualan saham tersebut.

10. Suatu kontraktor bangunan menerima order 5 rumah bergaya *ranch*, 7 rumah bergaya *Cope Cad*, dan 12 rumah khas kolonial. Bahan baku yang diperlukan untuk membangun setiap jenis rumah antara lain baja, kayu, kaca, cat dan tenaga kerja. Jumlah bahan baku yang diperlukan untuk membangun masing-masing gaya rumah ditunjukkan dalam tabel berikut :

	Baja	Kayu	Kaca	Cat	Tenaga Kerja
Ranch	5	20	16	7	17
Cape Cod	7	18	12	9	21
Kolonial	6	25	8	5	13

Harga baja adalah $2,500 per unit, kayu $1,200 per unit, kaca $800 per unit, cat $150 per unit, dan tenaga kerja $1,500 per hari.

Tentukan :

a. Berapa banyak masing-masing bahan baku harus disediakan untuk menyelesaikan seluruh pesanan?

b. Berapa total biaya yang harus dikeluarkan?

c. Jika kontraktor berkeinginan untuk memasukkan biaya transportasi bahan baku ke lokasi bangunan, juga biaya pembeliannya yang ditunjukkan pada tabel di bawah ini :

	Pembelian ($)	Transport ($)
Besi	3,500	50
Kayu	1,500	50
Kaca	1,000	100
Cat	250	10
Tenaga Kerja	3,000	0

Berapa total biaya yang harus dikeluarkan?

11. Suatu pabrik mobil memproduksi dua model, A dan B. Model A membutuhkan 1 jam kerja untuk megecat dan ½ jam kerja untuk mengilapkan. Model B membutuhkan 1 jam kerja untuk masing-masing proses tersebut. Selama tiap jam kerja yang dioperasikan, terdapat 100 jam kerja yang tersedia untuk mengecat dan 80 jam kerja untuk mengilapakan.

    a. Berapa banyak model mobil yang dapat diproduksi setiap jamnya, jika semua jam kerja yang tersedia didayagunakan?

    b. Anggap setiap model membutuhkan 10 widget dan 14 shim serta setiap model B membutuhkan 7 widget dan 10 shim. Pabrik tersebut bisa mendapatkan 800 widget dan 1130 shim setiap jam nya. Berapa banyak mobil dari setiap model dapat diproduksi dengan menggunakan semua suku cadang yang tersedia?

12. Seorang teman telah mengirimkan temannya satu pesan rahasia yang terdiri dari tiga baris matriks barus berikut :

R1 =[33 87 70]

R2 =[57 133 20]

R3 = [38 90 33]

Kedua teman tersebut telah mengingat matriks berikut (teman yang pertama menggunakannya untuk memberikan kode pesan tersebut)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Asumsikan bahwa huruf alphabet sesuai dengan angka 1 hingga 26. ganti angka-angka pada tiga matriks sebelumnya dengan huruf dan carilah pesannya.

==

Pendidikan adalah kunci untuk membuka pintu emas kebebasan

(George Washington Carver)

==

BAB V SISTEM PERSAMAAN LINIER

Tujuan Instruksional :

Setelah mengikuti perkuliahan dengan materi dari Bab V, diharapkan mahasiswa mampu :

- Mendefinisikan konsep Sistem Persamaan Linear
- Menunjukkan jenis-jenis penyelesaian Sistem Persamaan Linear
- Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear dengan 2 persamaan dan 2 variabel
- Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear dengan 3 persamaan dan 3 variabel
- Menggunakan MS Excel untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Menyelesaikan masalah dalam bisnis operasional dengan menggunaka Sistem Persamaan Linear

Bab 5 ini dapat digunakan selama 1 pertemuan @ 3 sks, yaitu sesuai dengan RPS Matematika Bisnis, di pertemuan 10.

5.1. Pengertian

Sebuah himpunan terhingga persamaan dalam peubah peubah $x_1, x_2, x, \ldots x_n$ disebut **Sistem Persamaan Linear**. Sederet angka $s_1, s_2, \ldots, s_n$ disebut penyelesaian sistem tersebut jika $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, $\ldots, x_n = s_n$ merupakan penyelesaian dari setiap persamaan dalam sistem tersebut. Misalnya sistem :

$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$

$3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$

mempunyai penyelesaian $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, karena nilai nilai ini memenuhi kedua persamaan di atas. Aakan tetapi $x_1 = 1$, $x_2 = 8$, $x_3 = 1$, bukanlah penyelesaian, karena nilai nilai ini hanya memenuhi persamaan pertama dari sistem.

Bentuk Umum dari SPL adalah :

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1$

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2$

$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \ldots + a_{3n} x_n = b_3$

....

$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m$

5.2. Jenis Jenis Sistem Persamaan Linear

Jenis jenis Sistem Persamaan Linear yang akan dibahas pada diktat ini adalah :

a. SPL dengan banyaknya persamaan sama dengan banyaknya variabel.

b. SPL dengan banyaknya persamaan tidak sama dengan banyaknya variabel.

c. SPL Homogen

5.3. Jenis Jenis Penyelesaian Sistem Persamaan Linear

a. Penyelesaian Konsisten

Arti : SPL mempunyai sekurang kurangnya 1 (satu) penyelesaian

Penyelesaian Konsisten ini terbagi menjadi 2 kemungkinan :

- Mempunyai tepat 1 (satu) penyelesaian.

  Artinya, SPL tersebut, hanya mempunyai tepat 1 penyelesaian, tidak ada penyelesaian lain. Contoh : SPL

  $x + 2y = 12$

  $4x + y = 13$

  Mempunyai tepat 1 penyelesaian, yaitu : $x = 2$ dan $y = 5$.

  Jika digambarkan, maka terlihat 2 garis lurus yang saling memotong, tepat di 1 titik .

- Mempunyai tak hingga penyelesaian

  Artinya, SPL tersebut mempunyai tak hingga banyak penyelesaian (mempunyai penyelesaian yang tidak dapat dihitung banyaknya). Contoh : SPL

  $x + 2y = 10$

  $2x + 4y = 20$

  Mempunyai tak hingga banyak penyelesaian , yaitu :

x	1	2	3	..	..	..
y	9/2	4	7/2	..	..	..

Jika digambarkan, maka akan terlihat 2 garis lurus yang saling berimpit.

b. Penyelesaian tak Konsisten

Arti : SPL tidak mempunyai penyelesaian , contoh :

$x + 2y = 10$

$2x + 4y = 5$

SPL di atas tidak ada penyelesaiannya.

Jika digambarkan, akan berupa 2 garis yang sejajar, sehingga tidak ada titik potongnya.

5.4. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear dengan 2 persamaan dan 2 variabel

Terdapat 2 metoda yang akan dibahas, yaitu :

a. Metoda Eliminasi

Metoda ini mendasarkan diri pada penggantian satu variabel pada variabel yang lain.

Contoh : Tentukan penyelesaian dari : $x + 2y = 12$

$$4x + y = 13$$

Jawab : Secara acak, kita ambil salah satu persamaan, andaikan kita ambil persamaan pertama : $x + 2y = 12 \leftrightarrow x = 12 - 2y$, kemudian gantikan x kepada persamaan ke dua, sehingga :

$$\begin{aligned} 4x + y = 13 &\leftrightarrow 4(12 - 2y) + y = 13 \\ &\leftrightarrow 48 - 8y + y = 13 \\ &\leftrightarrow -7y = -35 \\ &\leftrightarrow y = 5 \end{aligned}$$

Sehingga : $x = 12 - 2.5 = 12 - 10 = 2$

b. Metoda Substitusi

Metoda ini mendasarkan diri untuk menentukan nilai dari salah satu variabel dengan cara menghilangkan variabel lainnya.

Contoh : Tentukan penyelesaian dari : $x + 2y = 12$

$$4x + y = 13$$

Jawab : Andaikan hendak ditentukan nilai dari variabel x, maka harus dihilangkan variabel y :

$$\begin{array}{l|c|l} x + 2y = 12 & x1 & x + 2y = 12 \\ 4x + y = 13 & x2 & 8x + 2y = 26 \quad - \\ \hline & & -7x = -14, \quad x = 2 \end{array}$$

Untuk mencari nilai dari variabel y, maka dapat digunakan persamaan manapun dari persamaan yang ada, misalnya gunakan persamaan :

$4x + y = 13$, jika digantikan $x = 2$, maka akan didapatkan $y = 5$.

5.5. Menyelesaikan SPL dengan n persamaan dan n variabel, dengan menggunakan Metoda Matriks

Menyelesaikan SPL dengan menggunakan Metoda Matriks, maka SPL harus diubah terlebih dahulu menjadi Perkalian 2 Matriks, atau secara umum :

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1$$
$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 + \ldots + a_{2n}\, x_n = b_2$$
$$a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 + \ldots + a_{3n}\, x_n = b_3$$
$$\ldots.$$
$$a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + a_{n3}\, x_3 + \ldots + a_{nn}\, x_n = b_n$$

Diubah menjadi Perkalian 2 Matriks :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \ldots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \ldots & \mathbf{a}_{2n} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} & \ldots & \mathbf{a}_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \mathbf{a}_{n3} & \ldots & \mathbf{a}_{nnn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \ldots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \\ \ldots \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$$

Andaikan matriks A = $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \ldots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \ldots & \mathbf{a}_{2n} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} & \ldots & \mathbf{a}_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \mathbf{a}_{n3} & \ldots & \mathbf{a}_{nn} \end{bmatrix}$, matriks X = $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \ldots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$ dan

Matriks B = $\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \\ \ldots \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$, maka perkalian dua matriks dapat dilambangkan dengan :

$$A.X = B$$
$$A^{-1}.\, A.\, X = A^{-1}.B$$

$$I.X = A^{-1}.B$$

$$\mathbf{X = A^{-1}.B}$$

Contoh :

Tentukan penyelesaian dari SPL di bawah ini :

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$

$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$

$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$

Jawab : SPL yang ada, diubah terlebih dahulu menjadi perkalian dua matriks :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Andaikan matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$, matriks X = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, dan

matriks B = $\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, maka SPL dapat diubah menjadi :

A. X = B

Atau : $X = A^{-1}.B$.

Sehingga, untuk menyelesaikan persamaan ini, terlebih dahulu harus ditentukan A^{-1}. Setelah dihitung, maka :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Sehingga : $X = A^{-1}.B = \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Penyelesaian yang didapat : $\mathbf{x_1 = 1}$, $\mathbf{x_2 = 2}$ **dan** $\mathbf{x_3 = 3}$

5.6. Menyelesaikan SPL dengan n persamaan dan n variabel, dengan menggunakan Aturan Cramer

Menyelesaikan SPL dengan menggunakan Aturan Cramer, lebih mendasarkan diri pada perhitungan determinan.

Bentuk Umum SPL :

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1$$

$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 + \ldots + a_{2n}\, x_n = b_2$$

$$a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 + \ldots + a_{3n}\, x_n = b_3$$

….

$$a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + a_{n3}\, x_3 + \ldots + a_{nn}\, x_n = b_n$$

Tentukan terlebih dahulu masing masing determinannya :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} & \cdots & \mathbf{a}_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \mathbf{a}_{n3} & \cdots & \mathbf{a}_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta 1 = \begin{vmatrix} \mathbf{b}_{1} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{b}_{2} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \mathbf{b}_{3} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} & \cdots & \mathbf{a}_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{b}_{n} & \mathbf{a}_{m2} & \mathbf{a}_{m3} & \cdots & \mathbf{a}_{mn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta 2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{b}_{1} & \mathbf{a}_{13} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{b}_{2} & \mathbf{a}_{23} & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{b}_{3} & \mathbf{a}_{33} & \cdots & \mathbf{a}_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{b}_{n} & \mathbf{a}_{n3} & \cdots & \mathbf{a}_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta 3 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{b}_{1} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{b}_{2} & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{b}_{3} & \cdots & \mathbf{a}_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \mathbf{b}_{n} & \cdots & \mathbf{a}_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\ldots\ldots..\ \Delta n = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \cdots & \mathbf{b}_{1} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \cdots & \mathbf{b}_{2} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} & \cdots & \mathbf{b}_{3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \mathbf{a}_{n3} & \cdots & \mathbf{b}_{n} \end{vmatrix}$$

Kemudian, kita tentukan nilai dari penyelesaiannya, dengan cara :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

….

$$x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Contoh :

Tentukan penyelesaian dari SPL di bawah ini :

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$

$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$

$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$

Jawab :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta 1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta 2 = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Delta 3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

Jadi penyelesaiannya :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3$$

5.7. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear dengan MS Excel

Seperti diketahui bersama, Sistem Persamaan Linear merupakan salah satu penerapan matriks. Oleh karena Matriks dapat diselesaikan dengan MS Excel, maka tentu saja SPL dapat diselesaikan pula dengan MS Excel. Keuntungan dengan menggunakan MS Excel adalah pada perhitungan dengan menggunakan bilangan yang cukup sulit untuk diselesaikan secara manual, seperti bilangan desimal, bilangan pecahan.

Pada bab ini, penyelesaian dengan MS Excel akan disesuaikan dengan cara penyelesaian SPL yang telah dibahas, yaitu dengan metode Matriks dan metode Cramer.

5.7.1. Penyelesaian SPL dengan Metode Matriks menggunakan MS Excel.

Contoh 1 :

Selesaikan SPL di bawah ini dengan metode matriks, menggunakan MS Excel:

$9{,}375\ X_1 + 3{,}042\ X_2 - 2{,}437\ X_3 = 9{,}233$

$3{,}042\ X_1 + 6{,}183\ X_2 + 1{,}216\ X_3 = 8{,}205$

$-2{,}437\ X_1 + 1{,}216\ X_2 + 8{,}443\ X_3 = 3{,}934$

Jawab :

Seperti telah diuraikan pada bab 5.5 dari buku ini, maka untuk menyelesaikan SPL tersebut, kita harus mengubah menjadi perkalian dua matriks.

$$\begin{bmatrix} 9.375 & 3.042 & -2.437 \\ 3.042 & 6.183 & 1.216 \\ -2.437 & 1.216 & 8.443 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.233 \\ 8.205 \\ 3.934 \end{bmatrix}$$

Kemudian kita andaikan setiap matriks sehingga :

$$A = \begin{bmatrix} 9.375 & 3.042 & -2.437 \\ 3.042 & 6.183 & 1.216 \\ -2.437 & 1.216 & 8.443 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

dan matriks $B = \begin{bmatrix} 9.233 \\ 8.205 \\ 3.934 \end{bmatrix}$

sehingga A.X = B

atau $X = A^{-1}. B$

Dengan MS Excel, maka dapat dilakukan langkah-langkah :

1 Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D5).

2 Tuliskan matriks B ke dalam excel (misal matriks B ditulis di B8:B10).

3 Ambil range yang akan dipakai untuk menempelkan matriks inverse (misalkan range B13:D15), kemudian tulis formula : =**minvers(array).**

4 Tentukan matriks X, yang merupakan perkalian antara inv(A) dan B, dengan menyiapkan range B18: B20, kemudia tulis formula; **=mmult (array1,array2)**

5 Perhatikan capture pada gambar berikut :

B18 f_x {=MMULT(B13:D15,B8:B10)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3	A	9.375	3.042	-2.437						
4		3.042	6.183	1.216						
5		-2.437	1.216	8.443						
6										
7										
8	B	9.233								
9		8.205								
10		3.934								
11										
12										
13	Inv A	0.14803	-0.0836	0.05477						
14		-0.0836	0.21366	-0.0549						
15		0.05477	-0.0549	0.14216						
16										
17										
18	X = inv(A)*B	0.89628								
19		0.76522								
20		0.61444								
21										

Sehingga hasil penyelesaian dari SPL pada contoh 1 adalah :

$X_1 = 0.89628$

$X_2 = 0.76522$

$X_3 = 0.61444$

Langkah pengerjaan pada MS Excel dapat dipersingkat dalam satu langkah menjadi :

1 Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D5).

2 Tuliskan matriks B ke dalam excel (misal matriks B ditulis di B8:B10).

3 Tentukan matriks X, yang merupakan perkalian antara inv(A) dan B, dengan menyiapkan range B18: B20, kemudia tulis formula;**=mmult (minvers(array),array2).**

4 Perhatikan capture pada gambar berikut :

B15 f_x {=MMULT(MINVERSE(B3:D5),B8:B10)}

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3	A	9.375	3.042	-2.437				
4		3.042	6.183	1.216				
5		-2.437	1.216	8.443				
6								
7								
8	B	9.233						
9		8.205						
10		3.934						
11								
12								
13								
14								
15	X	0.89628						
16		0.76522						
17		0.61444						
18								

Sehingga hasil penyelesaian dari SPL pada contoh 1 adalah :

$X_1 = 0.89628$

$X_2 = 0.76522$

$X_3 = 0.61444$

Contoh 2 :

Suatu perusahaan rumahan meminjam Rp 2.250.000.000,00 dari tiga bank yang berbeda untuk memperluas jangkauan bisnisnya. Suku bunga dari ketiga bank tersebut adalah 5%, 6%, dan 7 %. Tentukan berapa pinjaman perusahaan tersebut terhadap masing-masing bank jika bunga tahunan yang harus dibayar perusahaan tersebut adalah Rp 130.000.000,00 dan banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 5% sama dengan dua kali uang yang dipinjam dengan bunga 7%?

Jawab :

Ubah dahulu soal tersebut menjadi Sistem Persamaan Linear :

Misalkan x, y, dan z secara berturut-turut adalah banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 5%, 6%, dan 7%.

Ini berarti yang menjadi persamaan pertama kita adalah

$x + y + z = 2.250$ (dalam jutaan).

Persamaan kedua diperoleh dari total bunga pertahunnya, yaitu Rp 130.000.000,00:

$0{,}05x + 0{,}06y + 0{,}07z = 130$ (dalam jutaan).

Sedangkan persamaan ketiga dapat diperoleh dari kalimat, “banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 5% sama dengan dua kali uang yang dipinjam dengan bunga 7%”, sehingga persamaannya adalah $x = 2z$.

Ketiga persamaan tersebut membentuk sistem seperti berikut.

$$x + y + z = 2.250$$

$$0{,}05x + 0{,}06y + 0{,}07z = 130$$

$$x = 2z \text{ atau } x - 2z = 0$$

Untuk menyelesaikan masalah tersebut dengan metode matriks dan dengan menggunakan MS Excel maka langkah yang harus dilakukan adalah :

1 Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D5).

2 Tuliskan matriks B ke dalam excel (misal matriks B ditulis di B8:B10).

3 Tentukan matriks X, yang merupakan perkalian antara inv(A) dan B, dengan menyiapkan range (B15: B17), kemudian tulis formula;

=mmult (minvers(array),array2).

4 Perhatikan capture pada gambar berikut :

D18

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3	A	1.00	1.00	1.00					
4		0.05	0.06	0.07					
5		1.00	0.00	-2.00					
6									
7									
8	B	2250							
9		130							
10		0							
11									
12									
13									
14									
15	X	1000							
16		750							
17		500							
18									

Sehingga hasilnya :

x = banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 5% = Rp 1.000.000.000,-

y = banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 6% = Rp 750.000.000,-

z = banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 7% = Rp 500.000.000,-

Contoh 3 :

Ali, Badar, dan Carli berbelanja di sebuah toko buku. Ali membeli dua buah buku tulis, sebuah pensil, dan sebuah penghapus. Ali harus membayar Rp 4.700.-, Badar membeli sebuah buku tulis, dua buah pensil, dan sebuah penghapus. Badar harus membayar Rp 4.300,-. Carli membeli tiga buah buku tulis, dua buah pensil, dan sebuah penghapus. Carli harus membayar Rp7.100

Berapa harga untuk sebuah buku tulis, sebuah pensil, dan sebuah penghapus?

Jawab :

Misalkan bahwa:

Harga untuk sebuah buku tulis adalah x rupiah,

Harga untuk sebuah pensil adalah y rupiah dan

Harga untuk sebuah penghapus adalah z rupiah.

Dengan demikian, model matematika yang sesuai dnegan data persoalan di atas adalah sebagai berikut.

$2x + y + z = 4.700$

$x + 2y + z = 4.300$

$3x + 2y + z = 7.100$

Dengan metode matriks, maka Sistem Persamaan Linear harus diubah menjadi perkalian matriks

A.X = B, di mana matriks :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, matriks $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

dan matriks $B = \begin{bmatrix} 4700 \\ 4300 \\ 7100 \end{bmatrix}$

Untuk menyelesaikan masalah tersebut dengan metode matriks dan dengan menggunakan MS Excel maka langkah yang harus dilakukan adalah :

1 Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D5).

2 Tuliskan matriks B ke dalam excel (misal matriks B ditulis di B7:B9).

3 Tentukan matriks X, yang merupakan perkalian antara inv(A) dan B, dengan menyiapkan range (B12: B14), kemudian tulis formula;

=mmult (minvers(array),array2).

4 Perhatikan capture pada gambar berikut :

B12 fx {=MMULT(MINVERSE(B3:D5),B7:B9)}

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3	A	2	1	1				
4		1	2	1				
5		3	2	1				
6								
7	B	4700						
8		4300						
9		7100						
10								
11								
12	X	1400						
13		1000						
14		900						
15								
16								

Dari hasil yang didapat dengan MS Excel, didapat hasil :

x = Harga untuk sebuah buku tulis = Rp 1.400,-

y = Harga untuk sebuah pensil = Rp 1.000,-

z = Harga untuk sebuah penghapus = Rp 900.-

Contoh 4 :

Sebuah kios menjual bermacam-macam buah di antaranya jeruk, salak, dan apel. Seseorang yang membeli 1 kg jeruk, 3 kg salak, dan 2 kg apel harus membayar Rp33.000,00. Orang yang membeli 2 kg jeruk, 1 kg salak, dan 1 kg apel harus membayar Rp23.500,00. Orang yang membeli 1 kg jeruk, 2 kg salak, dan 3 kg apel harus membayar Rp36.500,00. Berapakah harga per kilogram salak, harga per kilogram jeruk, dan harga per kilogram apel?

Jawab :

Misalkan harga per kilogram jeruk x, harga per kilogram salak y, dan harga per kilogram apel z. Berdasarkan persoalan di atas, diperoleh sistem persamaan linear tiga variabel berikut.

x + 3y + 2z = 33.000

2x + y + z = 23.500

x + 2y + 3z = 36.500

Dengan metode matriks, maka Sistem Persamaan Linear harus diubah menjadi perkalian matriks

A.X = B, di mana matriks :

A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, matriks X = $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

dan matriks B = $\begin{bmatrix} 33000 \\ 23500 \\ 36500 \end{bmatrix}$

Untuk menyelesaikan masalah tersebut dengan metode matriks dan dengan menggunakan MS Excel maka langkah yang harus dilakukan adalah :

1 Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D5).

2 Tuliskan matriks B ke dalam excel (misal matriks B ditulis di B7:B9).

3 Tentukan matriks X, yang merupakan perkalian antara inv(A) dan B, dengan menyiapkan range (B12: B14), kemudian tulis formula;

=mmult (minvers(array),array2).

4 Perhatikan *captur*e di bawah ini :

B12 fx {=MMULT(MINVERSE(B3:D5),B7:B9)}

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	A	1	3	2			
4		2	1	1			
5		1	2	3			
6							
7	B	33000					
8		23500					
9		36500					
10							
11							
12	X	6000					
13		4000					
14		7500					
15							

Dari hasil yang didapat dengan MS Excel, didapat hasil :

x = Harga untuk 1 kg jeruk = Rp 6.000,-

y = Harga untuk 1 kg salak = Rp 4.000,-

z = Harga untuk 1 kg apel = Rp 7.500,-

Contoh 5 :

Diketahui tiga bilangan a, b, dan c. Rata-rata dari ketiga bilangan itu sama dengan 16. Bilangan kedua ditambah 20 sama dengan jumlah bilangan lainnya. Bilangan ketiga sama dengan jumlah bilangan yang lain dikurang empat. Carilah bilangan-bilangan itu.

Jawab:

Ketiga bilangan adalah a, b, dan c. Ketentuan soal adalah sebagai berikut:

Rata-rata ketiga bilangan sama dengan 16 berarti:

$(a + b + c)/3 = 16$

Apabila kedua ruas kita kalikan 3 maka:

$a + b + c = 48$

Bilangan kedua ditambah 20 sama dengan jumlah bilangan lain berarti:

$b + 20 = a + c$

atau bisa kita tuliskan sebagai berikut.

$a - b + c = 20$

Bilangan ketiga sama dengan jumlah bilangan lain dikurang 4 berarti:

$c = a + b - 4$

atau bisa kita tuliskan sebagai berikut.

$a + b - c = 4$

Sehingga, SPL yang didapat adalah :

$a + b + c = 48$

$a - b + c = 20$

$a + b - c = 4$

Dengan metode matriks, maka Sistem Persamaan Linear harus diubah menjadi perkalian matriks

A.X = B, di mana matriks :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, matriks $X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

dan matriks $B = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 4 \end{bmatrix}$

Untuk menyelesaikan masalah tersebut dengan metode matriks dan dengan menggunakan MS Excel maka langkah yang harus dilakukan adalah :

1 Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B2:D5).

2 Tuliskan matriks B ke dalam excel (misal matriks B ditulis di B7:B9).

3 Tentukan matriks X, yang merupakan perkalian antara inv(A) dan B, dengan menyiapkan range (B12: B14), kemudian tulis formula;

=mmult (minvers(array),array2).

4 Perhatikan *captur*e di bawah ini :

B12 f_x {=MMULT(MINVERSE(B3:D5),B7:B9)}

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	A	1	1	1			
4		1	-1	1			
5		1	1	-1			
6							
7	B	48					
8		20					
9		4					
10							
11							
12	X	12					
13		14					
14		22					
15							

Dari hasil yang didapat dengan MS Excel, didapat hasil :

a = 12

b = 14

c = 22

Contoh 6 :

2a + 3b + c + d = 12

a + b + 5c – d = 15

3a + 2b + 2c + 4d = 9

4a – b + 3c + 2d = 5

Jawab :

SPL tersebut merupakan SPL dengan 4 variabel dan 4 persamaan, jika diselesaikan dengan cara manual, tentu akan lebih sulit. MS Excel akan dengan mudah memberikan penyelesaian.

Dengan metode matriks, maka Sistem Persamaan Linear harus diubah menjadi perkalian matriks

A.X = B, di mana matriks :

A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, matriks X = $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$

dan matriks B = $\begin{bmatrix} 12 \\ 15 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$

Untuk menyelesaikan masalah tersebut dengan metode matriks dan dengan menggunakan MS Excel maka langkah yang harus dilakukan adalah :

1 Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B3:E6).

2 Tuliskan matriks B ke dalam excel (misal matriks B ditulis di B8:B11).

3 Tentukan matriks X, yang merupakan perkalian antara inv(A) dan B, dengan menyiapkan range (B13: B16), kemudian tulis formula;

=mmult (minvers(array),array2).

4 Perhatikan *captur*e di bawah ini :

B13 f_x {=MMULT(MINVERSE(B3:E6),B8:B11)}

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3	A	2	3	1	1			
4		1	1	5	-1			
5		3	2	2	4			
6		4	-1	3	2			
7								
8	B	12						
9		15						
10		9						
11		5						
12								
13	X	1						
14		3						
15		2						
16		-1						
17								

Dari hasil yang didapat dengan MS Excel, didapat hasil :

a = 1

b = 3

c = 2

d = -1

5.7.2. Penyelesaian SPL dengan Metode Cramer menggunakan MS Excel.

Contoh 1 :

Selesaikan SPL di bawah ini dengan metode Cramer dan dengan menggunakan MS Excel

$x - 3y + 2z = 8$

$2x + y - 2z = 0$

$3x + 5y - z = 17$

Jawab :

Seperti telah diuraikan pada bab 5.6 dari buku ini, maka untuk menyelesaikan SPL tersebut, kita akan menentukan terlebih dahulu determinan dari masing-masing matriks yang didapat dari SPL.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 17 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 17 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

Untuk menyelesaikan masalah tersebut dengan metode Cramer dan dengan menggunakan MS Excel maka langkah yang harus dilakukan adalah :

1 Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B3:D5).

2 Tuliskan matriks A1 ke dalam excel (misal matriks A1 ditulis di B8:D10).

3 Tuliskan matriks A2 ke dalam excel (misal matriks A2 ditulis di B13:D15).

4 Tuliskan matriks A3 ke dalam excel (misal matriks A3 ditulis di B18:D20).

5 Hasil dari nilai x = $\frac{\Delta 1}{\Delta}$, di worksheet MS Excel dapat kita tulis sebagai : **=MDETERM(B8:D10)/MDETERM(B3:D5),** dan diletakkan di cell G4

6 Hasil dari nilai y = $\frac{\Delta 2}{\Delta}$, di worksheet MS Excel dapat kita tulis sebagai : **=MDETERM(B13:D15)/MDETERM(B3:D5),** dan diletakkan di cell G9.

7 Hasil dari nilai a = $\frac{\Delta 3}{\Delta}$, di worksheet MS Excel dapat kita tulis sebagai : **=MDETERM(B18:D20)/MDETERM(B3:D5),** dan diletakkan di cell G14.

8 Perhatikan capture pada gambar berikut :

G14 | f_x | =MDETERM(B18:D20)/MDETERM(B3:D5)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3	A	1	-3	2						
4		2	1	-2		x =	4			
5		3	5	-1						
6										
7										
8	A1	8	-3	2						
9		0	1	-2		y =	2			
10		17	5	-1						
11										
12										
13	A2	1	8	2						
14		2	0	-2		z=	5			
15		3	17	-1						
16										
17										
18		1	-3	8						
19	A3	2	1	0						
20		3	5	17						
21										

Hasil yang didapat adalah :

x = 4

y = 2

z = 5

Contoh 2 :

Tentukan nilai x, y, dan z dari SPL :

$$\frac{2}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=2$$

$$\frac{3}{x}-\frac{2}{y}+\frac{5}{z}=10$$

$$\frac{4}{x}+\frac{5}{y}-\frac{3}{z}=17$$

Jawab :

Untuk menyelesaikan masalah di atas, agar lebih mempermudah, kita akan memisalkan :

$a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$

Sehingga persamaan menjadi :

2a + 2b – 4c = 2

1503a – 2b + 5c = 10

4a + 5b – 3c = 17

Pertama, kita akan menentukan terlebih dahulu determinan dari masing-masing matriks yang didapat dari SPL.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 10 & 1 & -2 \\ 17 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 3 & 10 & 5 \\ 4 & 17 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 10 \\ 4 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

Untuk menyelesaikan masalah tersebut dengan metode Cramer dan dengan menggunakan MS Excel maka langkah yang harus dilakukan adalah :

1 Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B3:D5).

2 Tuliskan matriks A1 ke dalam excel (misal matriks A1 ditulis di B8:D10).

3 Tuliskan matriks A2 ke dalam excel (misal matriks A2 ditulis di B13:D15).

4 Tuliskan matriks A3 ke dalam excel (misal matriks A3 ditulis di B18:D20).

5 Hasil dari nilai a = $\frac{\Delta 1}{\Delta}$, di worksheet MS Excel dapat kita tulis sebagai : **=MDETERM(B8:D10)/MDETERM(B3:D5),** dan diletakkan di cell G4

6 Hasil dari nilai b = $\frac{\Delta 2}{\Delta}$, di worksheet MS Excel dapat kita tulis sebagai : **=MDETERM(B13:D15)/MDETERM(B3:D5),** dan diletakkan di cell G9.

7 Hasil dari nilai c = $\frac{\Delta 3}{\Delta}$, di worksheet MS Excel dapat kita tulis sebagai : **=MDETERM(B18:D20)/MDETERM(B3:D5),** dan diletakkan di cell G14.

8 Perhatikan capture pada gambar berikut :

F18

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3	A	2	2	-4						
4		3	-2	5		a=	-2.16667			
5		4	5	-3						
6										
7										
8	A1	2	-3	2						
9		10	1	-2		b =	-0.33333			
10		17	5	-1						
11										
12										
13	A2	1	2	2						
14		2	10	-2		c=	0.097222			
15		3	17	-1						
16										
17										
18		1	-3	2						
19	A3	2	1	10						
20		3	5	17						

Sehingga nilai a = -2.17

b = -0.33

c = 0.097

Karena :

$a = \frac{1}{x}$, maka x = 0.46

$b = \frac{1}{y}$, maka y = 3.03

$c = \frac{1}{z}$, maka z = 10.31

Contoh 3 :

Toko serba ada " Jaya Abadi" menjual bahan bahan pokok, diantaranya kopi, mentega dan gula.

Pada bulan Januari 2006 , Ibu Siti berbelanja di toko Jaya Abadi tersebut, 4kg kopi, 2 kg mentega, 3 kg gula, dan ia harus membayar sejumlah Rp 36.000,-

Pada bulan yang sama, Ibu Aminah berbelanja di toko yang sama, 2 kg kopi, 2 kg mentega, dan 4 kg gula, dan ia harus membayar sejumlah Rp 39.500,-

Pada bulan Februari 2006, ketika Ibu Siti berbelanja, ternyata harga mentega mengalami kenaikan sebesar 20% dari harga pada bulan Januari 2006 , dan harga gula mengalami kenaikan sebesar 10% dari harga pada bulan Januari 2006, sehingga, untuk belanjaan dengan jumlah yang sama di bulan Januari 2006, Ibu Siti harus membayar sejumlah Rp 40.050,-

Tentukan berapa harga 1 kg kopi, 1kg gula, dan 1kg mentega di Toko Jaya Abadi pada bulan Januari 2006.

Jawab :

Misalkan : x = harga 1 kg kopi

y = harga 1 kg mentega

z = harga 1 kg gula

Pembelian ibu Siti Januari 2006 : 4x + 2y + 3z = 36.000

Pembelian ibu Aminah Januari 2006 : 2x + 2y + 4z = 39.500

Pembelian ibu Siti Februari 2006: 4x + 2.(1,2)y + 3. (1,1)z = 40050 atau

4x + 2,4 y + 3,3 z = 40.050

Sehingga SPL yang terjadi :

$$4x + 2y + 3z = 36.000$$
$$2x + 2y + 4z = 39.500$$
$$4x + 2{,}4\,y + 3{,}3\,z = 40.050$$

Pertama, kita akan menentukan terlebih dahulu determinan dari masing-masing matriks yang didapat dari SPL.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2.4 & 3.3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 36000 & 2 & 3 \\ 39500 & 2 & 4 \\ 40050 & 2.4 & 3.3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 4 & 36000 & 3 \\ 2 & 39500 & 4 \\ 4 & 40050 & 3.3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 36000 \\ 2 & 2 & 39500 \\ 4 & 2.4 & 40050 \end{bmatrix}$$

Untuk menyelesaikan masalah tersebut dengan metode Cramer dan dengan menggunakan MS Excel maka langkah yang harus dilakukan adalah :

1 Tuliskan matriks A ke dalam excel (misal matriks A ditulis di B3:D5).

2 Tuliskan matriks A1 ke dalam excel (misal matriks A1 ditulis di B8:D10).

3 Tuliskan matriks A2 ke dalam excel (misal matriks A2 ditulis di B13:D15).

4 Tuliskan matriks A3 ke dalam excel (misal matriks A3 ditulis di B18:D20).

5 Hasil dari nilai $x = \frac{\Delta 1}{\Delta}$, di worksheet MS Excel dapat kita tulis sebagai : **=MDETERM(B8:D10)/MDETERM(B3:D5),** dan diletakkan di cell G4

6 Hasil dari nilai $y = \frac{\Delta 2}{\Delta}$, di worksheet MS Excel dapat kita tulis sebagai : **=MDETERM(B13:D15)/MDETERM(B3:D5),** dan diletakkan di cell G9.

7 Hasil dari nilai $z = \frac{\Delta 3}{\Delta}$, di worksheet MS Excel dapat kita tulis sebagai : **=MDETERM(B18:D20)/MDETERM(B3:D5),** dan diletakkan di cell G14.

8 Perhatikan capture pada gambar berikut :

E13 fx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3	A	4	2	3					
4		2	2	4		x=	1500		
5		4	2.4	3.3					
6									
7									
8	A1	36000	2	3					
9		39500	2	4		y =	5250		
10		40050	2.4	3.3					
11									
12									
13	A2	4	36000	3					
14		2	39500	4		z =	6500		
15		4	40050	3.3					
16									
17									
18		4	2	36000					
19	A3	2	2	39500					
20		4	2.4	40050					

r ...

Dari perhitungan MS Excel maka dapat disimpulkan :

x = harga 1 kg kopi = Rp 1.500,-

y = harga 1 kg mentega = Rp 5.250,-

z = harga 1 kg gula = Rp 6.500,-

5.8. Latihan Soal Persamaan Linear

1 Agus menyadari bahwa ia memiliki uang sebesar \$1257 pada akun yang tidak ia gunakan selama setahun. Tingkat bunga sebesar 7,3% dihitung

majemuk setiap tahun. Berapa bunga yang ia diperoleh dari akun tersebut tahun lalu?

2 Anderson Company memproduksi barang di mana biaya variabelnya perunit adalah \$6 dan biaya tetapnya \$80.000. Setiap unit mempunyai harga jual \$10. Tentukan jumlah unit yang harus dijual agar perusahaan dapat meraih keuntungan sebesar \$60.000.

3 Perusahaan Sportcraft memproduksi pakaian denim dan berencana akan menjual jenis jeans barunya ke perusahaan ritel. Harga untuk pedagang ritel adalah \$60 per potong celana jeans. Untuk memudahkan peritel, Sportcraft akan menyertakan tempelan harga pada setiap celana. Berapa yang harus dicantumkan pada tempelan harga agar peritel dapat mengurangi harga tersebut sebanyak 20% selama penjualan dan masih mendapatkan profit sebesar 15% atas harga beli di atas?

4 Uang sebanyak \$10,000 telah diinvestasikan pada dua bisnis ventura, A dan B. Pada akhir tahun pertama, A dan B masing-masing memperoleh hasil sebesar 6% dan 5,75% dari nilai investasi semula. Berapakah nilai investasi yang ditanamkan agar diperoleh hasil sebesar \$588,75?

5 Direksi perusahaan Maven Corporation setuju untuk menebus beberapa obligasinya dalam dua tahun. Ketika itu dibutuhkan dana sebesar \$1.102.500. Misalkan perusahaan saat ini menyisakan dana \$1.000.000. Berapakah suku bunga tahunan suatu investasi, dengan sistem bunga majemuk (tahunan), agar ang tersebut di akhir tahun kedua akan cukup untuk menebus obligasinya?

6 Sebuah perusahaan real estate mempiliki Apartemen Parklane Garden, yang terdiri dari 96 unit apartemen. Dengan biaya \$550 per bulan, semua apartemen penuh disewa. Tetapi untuk setiap kenaikan tarif \$25 per bulan, akan ada tiga apartemen kosong tanpa kemungkinan untuk diisi. Perusahaan ingin mendapatkan \$54.600 per bulan dari uang sewa apartemen. Berapakah seharusnya biaya sewa apartemen tersebut per bulannya?

7 Manajemen PT Smith ingin mengetahui jumlah penjualan (dalam unit) yang diperlukan agar perusahaan mendapat keuntungan sebesar \$150.000.

Data-datanya adalah sebagai berikut : harga satuan $50, biaya variabel per unit adalah $25, total biaya tetap $50,000. Dari data tersebut, tentukanlah jumlah unit yang terjual.

8 Seorang bermaksud untuk berinvestasi sebesar $20.000 pada dua buah perusahaan hingga total penghasilannya per tahun menjadi $1440. Salah satu perusahaan memberi bunga 6% setiap tahun;perusahaan kedua, karena memiliki resiko lebih tingga, memberinya 7,212% per tahun. Berapakah investasinya pada tiap-tiap perusahaan tersebut?

9 Seseorang telah menginvestasikan uangnya sebesar $120.000 sebagian dengan bunga 4% setahun dan sisanya 5% setahun. Total bunga pada akhir tahun pertama sama dengan suku bunga sebesar 4,12% untuk seluruh uangnya yaitu $120.000. Berapa uang yang diinvestasikan di masing-masing perusahaan tersebut?

10 Biaya pokok pembelian barang sebuah perusahaan eceran adalah $3.40 per unit. Jika pengecer tersebut ingin mendapatkan keuntungan sebesar 20% pada setiap penjualannya, berapa harga jual produk tersebut?

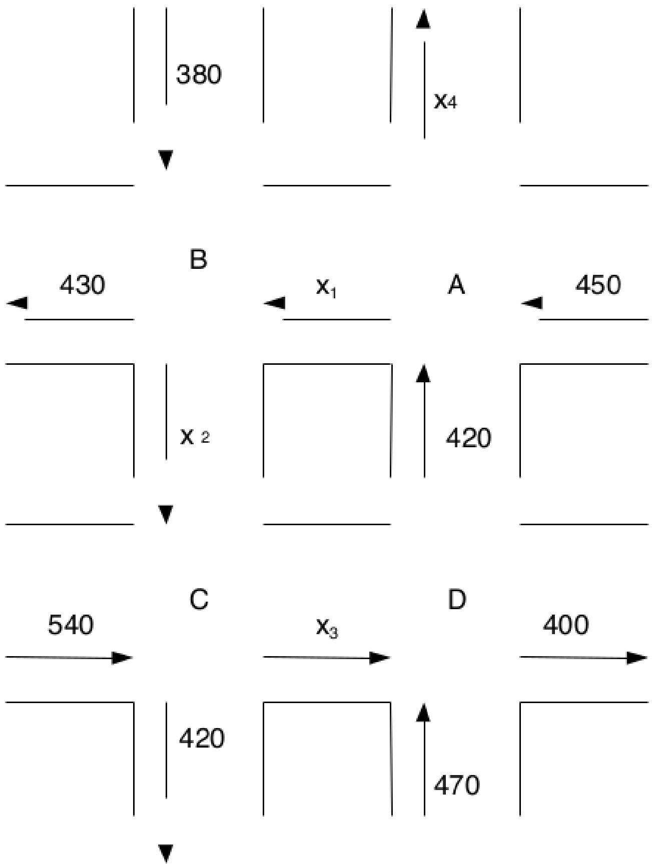
5.8. Latihan Soal

1. Gambar di bawah ini merupakan peta arus lalu lintas di sebuah kota besar. Terdapat 4 buah tempat, A,B, C dan D, yang terletak di perempatan jalan. Tanda anak panah menunjukkan arus pengguna jalan, baik masuk atau keluar dari tempat tersebut. Angka di samping anak panah menunjukkan jumlah pengguna jalan, disesuaikan dengan tanda anak panah.

Sebagai contoh, pada perempatan A, terdapat 2 anak panah masuk yaitu dengan nilai 420 dan 450, ini berarti jumlah pengguna jalan yang memasuki daerah A adalah (420+450) kendaraan, demikian pula terdapat 2 anak panah yang keluar dari perempatan A, ini berarti jumlah pengguna jalan yang keluar dari daerah A adalah (x_1+x_4).

Tentukan banyaknya pengguna lalu lintas pada setiap perempatan agar tidak terjadi kemacetan di masing masing perempatan (asumsikan, agar tidak terjadi kemacetan, makan jumlah pengguna arus masuk, harus sama dengan jumlah pengguna arus keluar).

Keterangan : tentukan terlebih dahulu x_1, x_2, x_3 dan x_4



2. Seorang dosen mendapatkan data tentang nilai dari 3 mahasiswanya adalah sebagai berikut :

- Jika diambil nilai mata kuliah Aljabar Linear dari mahasiswa I dan nilai mata kuliah PDB (Perilaku Dalam Berorganisasi), dari mahasiswa II, maka nilai rata ratanya adalah 3
- Jika diambil nilai mata kuliah PDB dari mahasiswa I dan nilai mata kuliah Aljabar Linear dari mahasiswa III, maka nilai rata ratanya adalah 2
- Jika diambil nilai mata kuliah Bahasa Inggris II dari mahasiswa I, nilai mata kuliah Akuntansi dari mahasiswa II dan nilai mata kuliah Sistem Operasi I dari mahasiswa III, maka nilai rata rata nya adalah 3

Jika diasumsikan nilai untuk setiap mahasiswa selalu sama untuk setiap mata kuliah, maka tentukan nilai dari masing masing mahasiswa tersebut.

(SKS untuk mk : Aljabar Linear adalah 3, PDB adalah 2, Bahasa Inggris II adalah 2, Akuntansi adalah 2, dan Sistem Operasi I adalah 2)

3. A,B, dan C sedang bermain kelereng, Pada permainan pertama, A kehilangan 1/3 dari jumlah kelerengnya, dan C kehilangan 1/6 dari jumlah kelerengnya. Setelah dihitung, jumlah kelereng A dan C yang tersisa dari permainan I ini adalah 260 kelereng.

Pada permainan ke dua, A kehilangan 10 kelereng, sedang B kehilangan ½ dari jumlah kelerengnya. Jumlah kelereng A dan B pada permainan kedua ini adalah 200 kelereng.

Pada permainan ketiga, B kehilangan 20 kelerengnya dan C kehilangan 10 kelerengnya. Jumlah kelereng A dan C pada permainan ketiga ini adalah 120.

Jika diandaikan pada setiap permainan, A, B, dan C tidak menambah kelereng mereka, dan kelereng yang hilang dianggap tidak menjadi milik pemain lain, tentukan jumlah kelereng mereka masing masing, sebelum bermain.

4. Pada semester genap tahun akademik 2002 di sebuah perguruan tinggi, jumlah mahasiswa yang tidak lulus dari 3 mata kuliah (Aljabar Linear, Bahasa Pemrograman, dan Sistem Operasi I) adalah 120 mahasiswa, yang terdiri dari : 10% dari mata kuliah Aljabar Linear, dan 20% dari mata kuliah Bahasa Pemrograman .

Pada semester genap tahun 2003, jumlah mahasiswa yang tidak lulus dari ketiga mata kuliah tersebut adalah 60 mahasiswa, yang terdiri dari : 6% dari mata kuliah Aljabar Linear dan 15% dari mata kuliah Sistem Operasi I.

Pada semester genap tahun 2004, jumlah mahasiswa yang tidak lulus dari ketiga mata kuliah tersebut adalah 145 mahasiswa, yang terdiri dari : 30% dari mata kuliah Bahasa Permograman dan 20% dari mata kuliah Sistem Operasi I.

Jika dianggap jumlah peserta pada masing masing mata kuliah selalu sama pada ketiga tahun tersebut, tentukan masing masing jumlah peserta pada mata kuliah Aljabar Linear, Bahasa Pemrograman, dan Sistem Operasi I.

5. Pada sebuah sekolah, siswa yang tidak hadir di hari Senin adalah sebanyak 24 murid, yang terdiri dari 10% dari murid kelas I, 5% dari murid kelas II, dan 3% dari murid kelas III.

Di hari Selasa, siswa yang tidak hadir, sebanyak 13 siswa, yang terdiri dari 4% dari murid kelas I, 5% dari murid kelas II, dan 1% dari murid kelas III.

Jika diketahui murid kelas II di sekolah itu, 20 lebih banyak dari jumlah murid kelas III, berapakah masing masing jumlah murid kelas I, II dan III di sekolah tersebut ?

6. Ada 3 batang bambu : jumlah panjangnya adalah 24,5 m. Untuk menjadikan ketiga bambu itu sama panjang, maka dari bambu pertama harus dipotong 1/5 bagian , dari bambu kedua harus dipotong ¼ bagian, dan dari bambu ketiga harus dipotong 1/3 bagian. Berapakah panjang masing masing bambu semula ?.

7. Toko serba ada " Jaya Abadi" menjual bahan bahan pokok, diantaranya kopi, mentega dan gula.

Pada bulan Januari 2006 , Ibu Siti berbelanja di toko Jaya Abadi tersebut, 4kg kopi, 2 kg mentega, 3 kg gula, dan ia harus membayar sejumlah Rp 36.000,-

Pada bulan yang sama, Ibu Aminah berbelanja di toko yang sama, 2 kg kopi, 2 kg mentega, dan 4 kg gula, dan ia harus membayar sejumlah Rp 39.500,-

Pada bulan Februari 2006, ketika Ibu Siti berbelanja, ternyata harga mentega mengalami kenaikan sebesar 20% dari harga pada bulan Januari 2006 , dan harga gula mengalami kenaikan sebesar 10% dari harga pada bulan Januari 2006, sehingga, untuk belanjaan dengan jumlah yang sama di bulan Januari 2006, Ibu Siti harus membayar sejumlah Rp 40.050,-

Tentukan berapa harga 1 kg kopi, 1kg gula, dan 1kg mentega di Toko Jaya Abadi pada bulan Januari 2006.

5.9. Rangkuman

1. Sebuah himpunan terhingga persamaan dalam peubah peubah $x_1, x_2, x, \ldots x_n$ disebut **Sistem Persamaan Linear.**
2. Jenis-jenis Persamaan Linier :
   - SPL dengan banyaknya persamaan sama dengan banyaknya variabel.

- 24SPL dengan banyaknya persamaan tidak sama dengan banyaknya variabel.
- SPL Homogen.
3. Jenis-jenis Penyelesaian Sistem Persamaan Linier :
   - Penyelesaian Konsisten : SPL mempunyai sekurang kurangnya 1 (satu) penyelesaian
   - Penyelesaian tak Konsisten : SPL tidak mempunyai penyelesaian
4. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear dengan 2 persamaan dan 2 variabel dengan mnggunakan metode eliminasi dan metode substitusi.
   - Metode Eliminasi : Metoda ini mendasarkan diri pada penggantian satu variabel pada variabel yang lain.
   - Metode Substitusi : Metoda ini mendasarkan diri untuk menentukan nilai dari salah satu variabel dengan cara menghilangkan variabel lainnya.
5. Menyelesaikan SPL dengan n persamaan dan n variabel, dengan menggunakan Metoda Matriks dan Metode Cramer.
6. Sistem Persamaan Linear merupakan salah satu penerapan matriks. Oleh karena Matriks dapat diselesaikan dengan MS Excel, maka tentu saja SPL dapat diselesaikan pula dengan MS Excel. Keuntungan dengan menggunakan MS Excel adalah pada perhitungan dengan menggunakan bilangan yang cukup sulit untuk diselesaikan secara manual, seperti bilangan desimal, bilangan pecahan.

==

Learn from yesterday, Live for today, Hope for tommorow

==

BAB VI FUNGSI EKSPONEN DAN LOGARITMA

Tujuan Instruksional :

Setelah mengikuti perkuliahan dengan materi dari Bab VI, diharapkan mahasiswa mampu :

- Mendefiniskan konsep fungsi eksponen.
- Menyebutkan sifat-sifat dari fungsi eksponen.
- Mendefiniskan konsep fungsi logaritma.
- Menyebutkan sifat-sifat dari fungsi logaritma.
- Menyelesaikan masalah dalam bisnis operasional dengan menggunakan fungsi eksponen.

Dalam Bab VI ini akan dibahas secara khusus mengenai fungsi eksponen dan logartima. Pemilihan materi ini dikarenakan banyaknya aplikasi dalam dunia bisnis yang membutuhkan pemecahan dengan fungsi eksponen dan logaritma, seperti bunga majemuk, pertumbuhan penduduk dan peluruhan radioaktif. Bab VI ini digunakan selama 1 pertemuan @ 3 sks, yaitu sesuai dengan RPS Matematika Bisnis, di pertemuan 11. Titik berat bagian ini adalah pada latihan soal di dunia bisnis.

6.1. Fungsi Eksponensial

Fungsi-fungsi dengan bentuk $f(x) = b^x$ untuk konstanta b, adalah penting dalam matematika, bisnis, ekonomi dan bidang studi lain, misalnya $f(x) = 2^x$. Fungsi ini disebut fungsi eksponensial.

Definisi :

Fungsi f yang didefinisikan sebagai $f(x) = b^x$ di mana $b > 0$ dan $b \neq 1$, dan eksponen x adalah bilangan real disebut fungsi eksponensial dengan basis b.

Aturan Fungsi Eksponensial

1.	$b^x . b^y = b^{x+y}$	5.	$\left(\frac{b}{c}\right)^x = \frac{b^x}{c^x}$
2.	$b^x : b^y = b^{x-y}$	6.	$b^1 = b$
3.	$(b^x)^y = b^{xy}$	7.	$b^0 = 1$

4. $(bc)^x = b^x.c^x$ 8. $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$

Contoh 1 :

Tentukan nilai 2^3, 2^4 dan 2^5

Jawab :

$2^3 = 2.2.2 = 8$

$2^4 = 2.2.2.2 = 16$

$2^5 = 2.2.2.2.2 = 32$

Contoh 2 :

Tunjukkan bahwa $(2^3)^2 = 2^6$

Jawab :

$(2^3)^2 = (8)^2 = 64$

$2^6 = 2.2.2.2.2.2 = 64$

Contoh 3 :

Misalkan uang sejumlah \$1000 diinvestasikan selama 10 tahun dengan suku bunga 6% bunga majemuk setahun. Hitunglah jumlah majemuknya dan hitunglah bunga majemuknya.

Jawab :

Untuk menyelesaikan masalah ini, kita gunakan rumus pencarian bunga majemuk, yaitu :

Jumlah majemuk S dari nilai simpanan P pada akhir tahun ke n dengan suku bunga r, bunga majemuk setiap tahun mengikuti persamaan : **$S = P(1+r)^n$,** menyatakan jumlah majemuk S dari pokok P pada akhir n perioda bunga dengan suku bunga r.

Sehingga untuk menghitung jumlah majemuknya, digunakan rumus pada baris sebelumnya, dengan P = 1000, r = 0,06 dan n = 10. Hasilnya adalah :

$$S = 1000\ (1 + 0{,}06)^{10} = \$1790{,}85$$

Sedang bunga majemuknya adalah S – P = \$1790, 85 - \$ 1000 = \$ 790.85

Contoh 4 :

Jumlah penduduk sebuah kota sebanyak 10.000 orang bertumbuh sebesar 2% per tahun. Hitunglah jumlah penduduk kota tersebut tiga tahun lagi.

Jawab :

Jumlah penduduk tiga tahun lagi dapat digunakan rumus :

$$P(t) = 10.000\ (1{,}02)^t$$

$$P(t) = 10.000\ (1{,}02)^3 = 10.612$$

Contoh 5 :

Perkiraan jumlah penduduk P sebuah kota mengikuti persamaan P = 100.000 $e^{0{,}05t}$ di mana t adalah tahun setelah 1990. Perkirakan jumlah penduduk di tahun 2010.

Jawab :

Dari tahun 1990 sampai 2010 adalah 20 tahun, jadi t = 20. Maka :

$$P = 100.000\ e^{0{,}05t} = 100.000\ e^{0{,}05.20} = 100.000\ e^{1} = 100.000\ e = 271.828$$

6.2. Latihan Soal Fungsi Eksponensial

1. Perkiraan populasi sebuah kota mengikuti persamaan $P = 125.000(1{,}11)^{t/20}$, di mana t adalah jumlah setelah tahun 1995. Berapakah perkiraan jumlah penduduk pada tahun 2015.
2. Tentukan masing-masing jumlah majemuk dan bunga majemuk atas investasi dan suku bungan tahunan pada data berikut ini :
   a. \$2000 setelah 5 tahun dengan bunga majemuk tahunan 3%.
   b. \$4000 setelah 12 tahun dengan bunga majemuk tengah tahunan 7,5%.
   c. \$6000 setelah 2 tahun dengan bunga majemuk kuartalan 8%.
   d. \$5000 setelah 2,5 tahun dengan bunga majemuk bulanan 9%.
3. Misalkan \$900 dimasukkan ke dalam rekening tabungan dengan suku bunga 4,5% bunga majemuk tahunan. Tentukan :
   a. Nilai rekening tersebut pada akhir tahun ke lima
   b. Jika rekening menghasilkan bunga majemuk tahunan dengan suku bunga 4,5%, berapa nilainya setelah tahun ke lima?

4. Sebuah sertifikat deposito dibeli seharga $6500 dan disimpan selama tiga tahun. Jika sertifikat tersebut menghasilkan bunga majemuk kuartalan 2%, berapa nilainya pada akhir tahun ketiga?.
5. Jumlah penduduk sebuah kota yang berpenduduk 5000 orang meningkat dengan indeks 3% per tahun. Tuliskan sebuah persamaan yang menentukan jumlah penduduk tersebut t tahun dari sekarang, dan hitunglah populasinya tiga tahun mendatang.
6. Setelah diadakan analisis demografi yang teliti, sebuah universitas memperkirakan bahwa pendaftaran mahasiswa baru akan menurun sebanyak 3% per tahun untuk 12 tahun ke depan. Jika saat ini universitas tersebut memiliki 14.000 orang mahasiswa berapakah jumlah mahasiswa 12 tahun ke depan?
7. Sebuah perusahaan *mail-order* mengiklankan produknya dalam sebuah majalah nasional. Ternyata, menurut perusahaan tersebut, di semua kota kecil, persentase (dalam desimal) sebanyak tepat x orang merespons sebuah iklan sesuai distribusi Poisson dengan $\mu = 0{,}5$. Berapa persen dari kota kota kecil tersebut dapat diharapkan tepat sebanyak dua orang merespons iklannya?

6.3. Fungsi Logaritma

Definisi : $y = {}^{b}\log x$ jika dan hanya jika $b^{y} = x$

Aturan dalam fungsi logaritma :

1. ${}^{b}\log b = 1$
2. ${}^{b}\log b \cdot x = x$

Contoh 1 :

Tentukan log 100

Jawab :

Bilangan dasar dari soal pada contoh 1 adalah 10, karena tidak dituliskan, sehingga seharusnya soal tersebut ditulis lengkap dengan ${}^{10}\log 100$.

Andaikan jawaban nya adalah x, maka $x = {}^{10}\log 100$, yang berarti $10^{x} = 100$, atau $x = 2$

Contoh 2 :

Tentukan $^{36}\log 6$

Jawab :

Andaikan jawabannya adalah x, maka x = $^{36}\log 6$, yang berarti $36^{x} = 6$, ini berarti x = ½

Contoh 3 :

Tentukan x pada persamaan $^{2}\log x = 4$

Jawab :

Kita dapat memperoleh persamaan yang eksplisit untuk x dengan menuliskan persamaan dalam bentuk eksponen. Cara ini menghasilkan : $2^4 = x$, atau x = 16

Contoh 4 :

Tentukan x pada persamaan $^{x}\log 49 = 2$

Jawab :

$^{x}\log 49 = 2$ dapat ditulis sebagai persamaan $x^2 = 49$, jadi x = 7. Untuk jawaban x =-7 harus diabaikan karena bilangan negatif tidak dapat menjadi basis fungsi logartima.

Contoh 5 :

Persamaan penawaran seorang produsen adalah $p = \log\left(10 + \frac{q}{2}\right)$, di mana q adalah jumlah unit yang dipasok pada harga p per unit. Berapakah agar jual yang ditetapkan produsen untuk memasok 1980 unit?

Jawab :

Karena yang ditanyakan adalah harga, maka harus dicari p dari persamaan yang ada, untuk 9 = 1980, sehingga :

$$p = \log\left(10 + \frac{1980}{2}\right)$$

$$p = \log 1000$$

$$p = 3$$

Jadi harga jual yang ditetapkan produsen adalah $3

6.4. Latihan fungsi logaritma

1. Tentukan x dari persamaan log (5x+1) = log(4x+2)
2. Tentukan x dari persamaan $^2\log x + 3\ ^2\log 2 = {}^2\log 2/x$
3. Tentukan x dari persamaan $^2\log (5x+1) = 4 - {}^2\log (3x-2)$
4. Persamaan permintaan untuk suatu produk adalah $q = 80 - 2^p$. Hitunglah p hingga dua angka di belakang koma jika q = 60.
5. Tuliskan setiap bentuk eksponensial menjadi logaritma dan setiap bentuk logaritma menjadi eksponensial.
   a. $3^5 = 243$
   b. $^5\log 625 = 4$
   c. $^{81}\log 3 = \frac{1}{4}$
   d. $10^5 = 100.000$
   e. $e^7 = 1096{,}63$
   f. $^9\log 9 = 1$
6. Tuliskan setiap pernyataan sebagai logaritma tunggal.
   a. 3 log 7 – 2 log 5
   b. 5 ln x + 2 ln y + ln z
   c. $\frac{1}{3}\ln x + 3\ln (x^2) - 2\ln (x-1) - 3\ln (x-2)$
   d. 4 log x + 2 log y – 3 (log z + log w)
7. Hitunglah nilai x dari fungsi berikut.
   a. log (6x-2) = log (8x-10)
   b. log 3x + log 3 = 2
   c. $3^{4x} = 9^{x+1}$
   d. $4^{3-x} = \frac{1}{16}$
   e. log x + log (10x) = 3
   f. $\ln\left(\frac{x-5}{x-1}\right) = \ln 6$
   g. $\ln (^x\log 3) = 2$
   h. $^2\log x + {}^4\log x = 3$
8. Hitunglah nilai x. Bulatkan jawaban anda hingga tiga angka di belakang koma
   a. $e^{3x} = 14$
   b. $10^{\frac{3x}{2}} = 5$

c. $5(e^{x+2} - 6) = 10$

d. $7e^{3x-1} - 2 = 1$

e. $4^{x+3} = 7$

f. $3^{\frac{5}{x}} = 2$

9. Sederhanakanlah $10^{\log x} + \log 10^{x} + \log 10$
10. Sederhanakanlah $\log \frac{1}{1000} + \log 1000$
11. Jika diketahui $^{2}\log 37 = 5{,}20945$ dan $^{2}\log 7 = 2{,}80735$. Hitunglah $^{7}\log 37$!
12. Gambarkan grafik dari $y = 3^{x}$ dan $y = {}^{3}\log x$
13. Gambarkan grafik dari $y = 2^{x+3}$
14. Gambarkan grafik dari $y = -2\ {}^{2}\log x$
15. Tuliskanlah $^{3}\log (x+5)$ dalam format logaritma natural
16. Tuliskanlah $2 \log (7x^{3}+5)$ dalam format logaritma biasa
17. Hitunglah pernyataan tanpa menggunakan kalkulator

    a. $^{5}\log 125$

    b. $^{3}\log \frac{1}{81}$

    c. $^{4}\log 2$

    d. $^{2}\log \frac{1}{64}$

6.5.Rangkuman

1. Fungsi-fungsi dengan bentuk $f(x) = b^{x}$ untuk konstanta b, adalah penting dalam matematika, bisnis, ekonomi dan bidang studi lain, misalnya $f(x) = 2^{x}$. Fungsi ini disebut **fungsi eksponensial**.
2. Aturan Fungsi Eksponensial :

1.	$b^{x} . b^{y} = b^{x+y}$	5.	$\left(\frac{b}{c}\right)^{x} = \frac{b^{x}}{c^{x}}$
2.	$b^{x} : b^{y} = b^{x-y}$	6.	$b^{1} = b$
3.	$(b^{x})^{y} = b^{xy}$	7.	$b^{0} = 1$
4.	$(bc)^{x} = b^{x}.c^{x}$	8.	$b^{-x} = \frac{1}{b^{x}}$

3. Definisi fungsi logaritma : $y = {}^{b}\log x$ jika dan hanya jika $b^{y} = x$
4. Aturan fungsi logaritma :

1. $^{b}\log b = 1$

2. $^{b}\log b^{x} = x$

===

Aku tidak berusaha menjadi lebih baik dari orang lain.
Aku hanya berusaha lebih baik dari aku yang dulu

===

BAB VII MATEMATIKA KEUANGAN

Tujuan Instruksional :

Setelah mengikuti perkuliahan dengan materi dari Bab VII, diharapkan mahasiswa mampu :

- Mendefinisikan konsep bunga majemuk.
- Mendefinisikan konsep nilai sekarang dan nilai majemuk.
- Mendefinisikan konsep anuitas.
- Menyelesaikan masalah masalah bisnis dengan menggunakan bunga majemuk, nilai sekarang, nilai majemuk dan anuitas.

Aktivitas ekonomi merupakan bagian dari kehidupan manusia sejak ribuan tahun yang lalu. Dalam banyak hal konsep dasar ekonomi hanya diekspresikan dalam bentuk matematika sederhana, seperti bilangan bulat atau pecahan diikuti dengan operasi sederhana seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Namun dengan berkembangnya kehidupan manusia, maka aktivitas ekonomi yang dilakukan semakin kompleks dan makin saling terkait dengan aktivitas lainnya, sehingga membutuhkan pemecahan yang kompleks juga.

Setelah mempelajari beberapa dasar- dasar matematika, maka bab ini khusus akan mempelajari penerapan dari dasar matematika pada dunia bisnis. Tujuan dari pertemuan ini adalah, agar dapat membuat analisis dalam dunia bisnis dengan lebih sistematis dan praktis, karena melalui sifat matematika, maka diperoleh beberapa keuntungan, yaitu membuat persoalan menjadi lebih sederhana, menggunakan logika lengkap dengan asumsi-asumsinya, dapat menggunakan variabel yang sebanyak-banyaknya, berdasar sifat generalisasi.

Tentunya sangat banyak aplikasi matematika dalam dunia bisnis, namun pada bab ini hanya akan dibahas tentang bunga majemuk, nilai sekarang, nilai majemuk, dan anuitas. Hal ini menyesuaikan dengan jumlah jam pertemuan pada pertemuan 12 dari mata kuliah Matematika Bisnis ini.

7.1. Nilai Majemuk

Dalam tingkat bunga majemuk, pada akhir setiap periode bunga, bunga yang diperoleh untuk periode tersebut ditambahkan ke utang pokok (jumlah yang diinvestasikan) sehingga jumlah ini pun memperoleh bunga selama periode bunga berikutnya. Rumus dasar untuk nilai (jumlah majemuk) suatu investasi setelah n periode bunga dalam tingkat bunga majemuk adalah sebagai berikut.

$S = P(1 + r)^n$

Dimana,

S : Nilai Majemuk atau Jumlah Majemuk

P : Nilai Sekarang

r : tingkat bunga periodik

n : periode bunga

Nilai majemuk atau jumlah majemuk ini juga disebut dengan jumlah terakumulasi dan selisih antara nilai majemuk dan nilai pokok awal $S - P$ disebut dengan **bunga majemuk**.

Suatu tingkat bunga biasanya dinyatakan dalam tingkat tahunan yang disebut dengan tingkat nominal atau tingkat prosentase tahunan (*Annual Percentage Rate* -APR). Tingkat periodic atau timgkat bunga per periode bunga diperoleh dengan cara membagi tingkat nominal dengan jumlah periode bunga per tahunnya.

Contoh 1 :

Hitung nilai majemuk atau jumlah majemuknya saat $1000 diinvestasikan selama lima tahun pada tingkat nominal 8% yang dimajemukkan per kuartal. Tingkat bunga per periodenya adalah 0,08/4. Dari rumus di atas didapatkan hasil sebagai berikut.

Jawab :

$$S = P(1 + r)^n$$

$$= 1000\left(1 + \frac{0{,}08}{4}\right)^{5\times4}$$

$$= 1000(1{,}02)^{20}$$

$$= 1485{,}95$$

Jadi, nilai majemuk yang didapatkan adalah sebesar $1485,95

Contoh 2 :

Anggaplah dana \$500 ingin dibungakan menjadi \$588,38 dalam suatu tabungan setelah tiga tahun. Jika bunganya dimajemukkan setiap enam bulan carilah tingkat bunga nominal bunga tersebut yang dimajemukkan setiap enam bulan yang diperoleh dari dana tersebut.

Jawab :

Anggap r sebagai tingkat bunga enam bulanan.

Terdapat $2 \times 3 = 6$ periode bunga, dari rumus di atas diperoleh hasil sebagai berikut.

$S = P(1 + r)^n$

$588{,}38 = 500(1 + r)^6$

$\frac{588{,}38}{500} = (1 + r)^6$

$1{,}18 = (1 + r)^6$

$(1{,}18)^{\frac{1}{6}} = ((1 + r)^6)^{\frac{1}{6}}$

$1{,}03 = (1 + r)$

$r = 0{,}03$

Jadi, tingkat bunga nominalnya adalah sebesar 3% yng dimajemukkan setiap enam bulan.

Contoh 3 :

Pada tingkat bunga berapakah, yang dimajemukkan setiap tahun sejumlah uang akan berlipat ganda dalam delapan tahun ?

Jawab :

Anggap

Anggap r sebagai tingkat bunga yang melipatgandakan nilai pokok P dalam delapan tahun. Berarti nilai majemuknya adalah $2P$. Berdasarkan persamaan di atas didapatkan hasil sebagai berikut.

$S = P(1 + r)^n$

$2P = P(1 + r)^8$

$\frac{2P}{P} = (1 + r)^8$

$(2)^{\frac{1}{8}} = ((1+r)^8)^{\frac{1}{8}}$

$1{,}091 = (1+r)$

$r = 0{,}091$

Jadi, tingkat bunga yang diinginkan adalah sebesar 9,1% agar nilai majemuk delapan tahun ke depan menjadi dua kali nilai sekarang.

Contoh 4 :

Berapa waktu yang dibutuhkan agar dana sebesar $600 bertambah menjadi $900 pada tingkat bunga tahunan 6% yang dimajemukkan setiap kuartalnya ?

Jawab :

Tingkat periodiknya adalah $r = \frac{0{,}06}{4} = 0{,}015$.

Anggap n sebagai jumlah periode bunga yang dibutuhkan oleh nilai pokok $P = 600$ agar menjadi $S = 900$.

$S = P(1+r)^n$

$900 = 600(1+0{,}015)^n$

$\frac{900}{600} = (1+0{,}015)^n$

$1{,}5 = (1{,}015)^n$

Untuk menyelesaikan n, pertama-tama menerapkan logaritma natural pada kedua sisi :

$\ln(1{,}015)^n = \ln 1{,}5$

$\mathrm{n} \times \ln(1{,}015)^n = \ln 1{,}5$ karena $\ln(m)^r = r \times \ln m$

$n = \frac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}105}$

$n = 27{,}233$

Jumlah tahun setara dengan periode bunga 27,233 adalah $\frac{27{,}233}{4} = 6{,}8083$, yakni sekitar 6 tahun dan 9,5 bulan. Sebenarnya nilai pokok tersebut tidak mencapai $900 hingga tahun ke tujuh terlewati karena bunganya dimajemukkan per kuartal.

7.2. Tingkat Bunga Efektif

Tingkat bunga efektif r_e yang ekuivalen dengan tingkat bunga nominal r yang dimajemukkan n kali dalam setahun dinyatakan dalam rumus sebagai berikut.

$$r_e = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1$$

Dimana,

r_e : Tingkat bunga efektif

r : Tingkat bunga nominal

n : periode

Jika P dolar diinvestasikan pada tingkat bunga nominal 10% yang dimajemukkan per kuartal per tahunnya, nilai pokok tersebut akan bertambah lebih dari 10% pada tahun tersebut. Sebenarnya, tingkat bunga majemuknya adalah

$$\begin{aligned} S - P &= P\left(1 + \frac{0{,}10}{4}\right)^4 - P \\ &= ((1{,}025)^4 - 1)P \\ &= 0{,}103813P \end{aligned}$$

Setara dengan 10,38% dari P. Hal ini berarti, 10,38% adalah perkiraan tingkat bunga majemuk per tahun yang sebenarnya didapatkan dan tingkat bunga ini disebut dengan **tingkat bunga efektif**. Tingkat bunga efektif bersifat independen dari P. Secara umum, tingkat bunga efektif hanyalah tingkat bunga sederhana yang diperoleh selama suatu periode tertentu dalam setahun. Dengan demikian, tingkat bunga nominal 10% yang dimajemukkan per kuartal ekuivalen dengan tingkat bunga efektif sebesar 10,38%.

Contoh 1 :

Berapa tingkat bunga efektif yang ekuivalen dengan tangkat bunga nominal 6% yang dimajemukkan

a. Setiap enam bulan

b. Setiap tiga bulan

Jawab :

a. Tingkat bunga efektifnya adalah sebagai berikut.

$$r_e = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1$$

$$= \left(1 + \frac{0,06}{2}\right)^2 - 1$$
$$= (1,03)^2 - 1$$
$$= 0,0609$$
$$= 6,09\%$$

b. Tingkat bunga efektifnya adalah sebagai berikut.

$$r_e = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1$$
$$= \left(1 + \frac{0,06}{2}\right)^4 - 1$$
$$= (1,03)^4 - 1$$
$$= 0,061364$$
$$= 6,14\%$$

Contoh 2 :

Berapa jumlah yang akan terakumulasi dalam waktu 15 tahun dari dana sebesar $12000 jika diinvestasikan pada tingkat bunga efektif 5% ?

Jawab :

Anggap n sebagai jumlah tahun yang dibutuhkan agar suatu nilai pokok P berlipat ganda. Berarti nilai majemuknya adalah $2P$. Dengan demikian hasilnya adalah

$2P = P(1 + r)^n$

$2 = (1 + r)^n$

$\ln 2 = n \times \ln(1 + r)$ menggunakan logaritma pada kedua sisi persamaan, maka

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + r)}$$

Sebagai contoh jika $r = 0,06$ maka jumlah tahun yang dibutuhkan agar nilai pokoknya berlipat ganda adalah

$\frac{\ln 2}{\ln 1,06} = 11,9$ tahun

Contoh 3 :

Jika seorang investor memiliki pilihan untuk menginvestasikan dana pada tingkat bunga 6% yang dimajemukkan setiap hari atau 6% yang dimajemukkan setiap kuartal, manakah pilihan yang terbaik?

Jawab :

Strategi : Tentukan tingkat bunga efektif yang ekuivalen untuk setiap tingkat bunga efektif dan kemudian membandingkan hasilnya.

Masing-masing tingkat bunga efektifnya adalah

$$r_e = \left(1 + \frac{0,06}{365}\right)^{365} - 1$$

$$= 0,0618 = 6,18\%$$

Dan

$$r_e = \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^{4} - 1$$

$$= 0,0627 = 6,27\%$$

Karena pilihan kedua memberikan tingkat bunga efektif yang lebih tinggi, maka pilihan kedua lebih baik.

7.3. Nilai Sekarang (*Present Value*)

Nilai sekarang adalah nilai pokok P yang harus diinvestasikan pada tingkat bunga periodik r untuk periode bunga n dengan rumus sebagai berikut.

$$P = S(1 + r)^{-n}$$

Dimana,

P : Nilai Sekarang

S : Nilai Majemuk

r : tingkat bunga periodic

n : periode

Contoh 1 :

Carilah nilai sekarang dari \$1000 yang diakumulasikan setelah tiga tahun apabila tingkat bunganya 9% dimajemukkan setiap bulan.

Jawab :

$S = 1000, r = \frac{0,09}{12} = 0,0075, n = 3 \times 12 = 36$

Dengan menggunakan persamaan

$P = S(1 + r)^{-n}$, didapatkan hasil sebagai berikut.

$$= 1000(1 + 0,0075)^{-36}$$

$$= 1000(1,0075)^{-36}$$

$= 764{,}15$

Jadi, yang harus diinvestasikan pada tingkat bunga 9% yang dimajemukkan setiap bulan agar menjadi \$1000 dalam waktu tiga tahun adalah sebesar \$764,15.

Contoh 2 :

Suatu dana perwalian untuk pendidikan anak telah dirancang melalui satu kali pembayaran sehingga pada akhir periode 15 tahun akan terakumulasi dana \$50.000. Apabila dana ini berbunga sebesar 7% yang dimajemukkan setiap enam bulan, berapa banyak uang yang harus dibayarkan untuk dana perwalian tersebut?

Jawab :

Ingin dicari nilai sekarang dari \$50.000 yang terakumulai selama 15 tahun kemudian. Dari persamaan $P = S(1+r)^{-n}$ dengan $S = 50.000$, $r = \frac{0{,}07}{2} = 0{,}035$ dan $n = 15 \times 2 = 30$, didapatkan hasil sebagai berikut.

$P = S(1+r)^{-n}$

$= 50.000(1 + 0{,}035)^{-30}$

$= 50.000(1{,}035)^{-30}$

$= 17.813{,}92$

Jadi, nilai sekarang yang harus dibayarkan adalah sebesar \$17.813,92.

7.4. Nilai Majemuk Kontinu

Nilai majemuk dalam tingkat bunga kontinu dinyatakan dalam rumus sebagai berikut.

$S = Pe^{rt}$

Dimana,

S : Nilai majemuk kontinyu

P : Nilai sekarang

r : Tingkat bunga yang dimajemukkan secara kontinu

n : periode

Selisih antara nilai majemuk kontinyu dan nilai pokok awal $S - P$ disebut dengan **bunga majemuk kontinu.**

Contoh 1 :

Jika \$100 diinvestasikan pada tingkat bunga tahunan 5% yang dimajemukkan secara kntinu, carilah nilai majemuknya pada akhir :

a. Tahun pertama
b. Tahun kelima

Jawab :

a. $P = 100, r = 0{,}05, e = 2{,}71828$ dan $t = 1$, sehingga

$S = Pe^{rt}$

$= 100 \times (2{,}71828)^{(0{,}05)(1)}$

$= 105{,}13$

Jadi, nilai majemuk kontinyu pada akhir tahun pertama sebesar \$105,13.

b. $P = 100, r = 0{,}05, e = 2{,}71828$ dan $t = 5$, sehingga

$S = Pe^{rt}$

$= 100 \times (2{,}71828)^{(0{,}05)(5)}$

$= 128{,}40$

Jadi, nilai majemuk kontinyu pada akhir tahun kelima sebesar \$128,40.

7.5. Tingkat Bunga Efektif dalam Tingkat Bunga Kontinu

Tingkat bunga efektif yang sesuai dengan tingkat bunga tahunan r yang dimajemukkan secara kontinyu dapat dinyatakan dalam rumus sebagai berikut.

$r_e = e^r - 1$

Dimana,

r_e : Tingkat bunga efektif dalam tingkat bunga kontinu

r : Tingkat bunga tahunan yang dimajemukkan secara kontinu

e : 2,71828

Contoh 1 :

Carilah tingkat bunga efektif yang sesuai dengan tingkat bunga tahunan 5% yang dimajemukkan secara kontinu !

Jawab :

Tingkat bunga efektifnya adalah sebagai berikut.

$r_e = e^r - 1$

$= (2{,}71828)^{0{,}05} - 1$

$= 0{,}0513 \approx 5{,}13\%$

Tingkat bunga efektifnya adalah sebesar 5,13%.

7.6. Nilai Sekarang dalam Tingkat Bunga Kontinu

Nilai sekarang dalam tingkat bunga kontinu dinyatakan dalam rumus sebagai berikut.

$P = Se^{-rt}$

Dimana,

P : Nilai sekarang dalam tingkat bunga kontinu

S : Nilai majemuk dalam tingkat bunga kontinu

r : Tingkat bunga tahunan yang dimajemukkan secara kontinu

t : Periode

Contoh 1 :

Suatu dana perwalian dibuat melalui pembayaran tunggal sehingga pada akhir tahun ke-20 akan terkumpul dana $25.000. Apabila tingkat bunga dimajemukkan secara kontinu pada tingkat bunga tahunan 7%, berapa banyak uang (hingga dolar terdekat) yang harus dibayarkan di awal ?

Jawab :

Ingin dicari nilai sekarang dari $25.000 dengan jangka waktu 20 tahun dari sekarang. Sehingga didapatkan hasil sebagai berikut.

$P = Se^{-rt}$

$= 25.000 \times (2{,}71828)^{-(0{,}07)(20)}$

$= 25.000 \times (2{,}71828)^{-1{,}4}$

$= 6165$

Jadi, uang yang harus dibayarkan di awal sebagai nilai sekarang adalah sebesar $6165.

7.7. Anuitas

Anuitas merupakan rangkaian pembayaran tetap yang dilakukan secara berkala pada jangka waktu tertentu. Waktu berkala tersebut akan selalu memiliki rentang waktu yang sama, dan kita menyebutkan rentang waktu tersebut sebagai periode pembayaran. Interval tersebut merupakan jangka waktu anuitas.

Pembayaran tersebut akan selalu memiliki jumlah yang sama. Definisi informal anuitas yang digunakan oleh perusahaan asuransi dalam iklan mereka menyiratkan bahwa suatu anuitas merupakan rangkaian pembayaran dalam bentuk pendapatan pensiun.

7.7.1. Nilai Sekarang dari Anuitas

Nilai sekarang dari anuitas merupakan jumlah dari nilai sekarang dari seluruh n pembayaran. Hal ini menggambarkan jumlah yang harus diinvestasikan sekarang untuk membeli seluruh n. Berikut rumus nilai sekarang dari anuitas.

$A = R\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right)$

Dimana,

A : Nilai sekarang dari anuitas biasa

R : Periode pembayaran

r : Tingkat bunga per periode

n : Periode

Contoh 1 :

Carilah nilai sekarang dari anuitas $100 per bulan selama 3,5 tahun pada tingkat bunga 6% yang dimajemukkan setiap bulan.

Jawab :

Dengan mensubstitusikan pada persamaan $A = R\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right)$ dengan $R = 100$, $r = \frac{0{,}06}{12} = 0{,}005$ dan $n = 3{,}5 \times 12 = 42$, sehingga

$$A = R\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right)$$

$$= 100\left(\frac{1-(1+0{,}005)^{-42}}{0{,}005}\right)$$

$$= 100(37{,}798300)$$

$$= 3779{,}83$$

Jadi, nilai sekarang dari anuitas tersebut adalah sebesar $3779,83.

Contoh 2 :

Dengan tingkat bunga 5% yang dimajemukkan setiap tahun, carilah nilai sekarang dari anuitas umum \$2000 yang jatuh tempo setiap akhir tahun selama tiga tahun dan \$5000 yang jatuh tempo pada akhir tahun selama empat tahun.

Jawab :

Nilai sekarang diperoleh dengan menjumlahkan nilai sekarang dari seluruh pembayaran :

$$2000(1{,}05)^{-1} + 2000(1{,}05)^{-2} + 2000(1{,}05)^{-3} + 2000(1{,}05)^{-4} + 2000(1{,}05)^{-5} + 2000(1{,}05)^{-6} + 2000(1{,}05)^{-7}$$

Perhitungan tersebut dapat disederhanakan dengan mengubah pembayaran menjadi suatu anuitas \$5000 selama tujuh tahun, dikurangi anuitas \$3000 selama tiga tahun, sehingga tiga pembayaran pertama masing-masing sebesar \$2000. Dengan demikian, nilai sekarangnya adalah

$$5000\left(\frac{1-(1+0{,}05)^{-7}}{0{,}05}\right) - 3000\left(\frac{1-(1+0{,}05)^{-3}}{0{,}05}\right)$$

$$= 5000(5{,}786373) - 3000(2{,}723248)$$

$$= 20762{,}12$$

Contoh 3 :

Jika \$10.000 digunakan untuk membeli suatu anuitas yang terdiri dari pembayaran yang sama pada setiap akhir tahun selama empat tahun dan bunganya adalah 6% yang dimajemukkan setiap tahun, carilah jumlah setiap pembayaran tersebut.

Jawab :

$A = 10.000, n = 4, r = 0{,}06$

$$A = R\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right)$$

$$10.000 = R\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right)$$

$$R = \frac{10.000}{\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right)}$$

$$R = \frac{10.000}{\left(\frac{1-(1+0{,}06)^{-4}}{0{,}06}\right)}$$

$$R = \frac{10.000}{3,465106}$$

$$R = 2885,91$$

Secara umum, rumus $R = \frac{A}{\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right)}$ menghasilkan pembayaran periodik R dari anuitas biasa yang nilai sekarangnya A.

Contoh 4 :

Premi dari suatu polis asuransi adalah \$50 per kuartal, yang dapat dibayar pada awal setiap periode kuartal. Jika pemegang polis ingin membayarpremi satu tahun di muka, berapa banyak yang sebaiknya dibayarkan, dengan bunga 4% yang dimajemukkan setiap 3 bulan ?

Jawab:

Ingin dicari nilai sekarang dari suatu anuitas %50 per periode selama 4 periode pada tingkat bunga 1% per periode. Akan terapi setiap pembayaran jatuh tempo pada awal periode pembayaran sehingga memiliki anuitas jatuh tempo. Anuitas tersebut dapat diperlakukan sebagai pembayaran awal \$50, diikuti dengan anuitas biasa sebesar \$50 selama tiga periode. Dengan demikian nilai sekarang adalah :

$$R + R\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right)$$

$$50 + 50\left(\frac{1-(1+0,01)^{-3}}{0,01}\right)$$

$$50 + 50(2,940985) = 197,05$$

Berdasarkan hal tersebut didapatkan rumus umum untuk nilai sekarang dari suatu anuitas jatuh tempo adalah

$$A = R\left(1 + \left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right)\right)$$

7.7.2. Nilai Masa Depan dari Suatu Anuitas

Nilai masa depan dari suatu anuitas merupakan penjumlahan dari nilai masa depan seluruh n pembayaran. Rumus dari nilai masa depan dari suatu anuitas adalah sebagai berikut.

$$S = R.\frac{(1+r)^{n}-1}{r}$$

Dimana,

S : Nilai masa depan

R : Nilai anuitas biasa

n : Periode

r : Tingkat bunga per periode

Contoh 1 :

Carilah nilai masa depan dari suatu anuitas yang terdiri dari pembayaran $50 pada setiap akhir kuartal selama tiga tahun dengan tingkat bunga 6% yang dimajemukkan setiap tiga bulan. Carilah juga tingkat bunga majemuknya !

Jawab :

$R = 50, n = 4(3) = 12, r = \frac{0,06}{4} = 0,015$

$$S = R.\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$S = 50.\frac{(1+0,015)^{12} - 1}{0,015}$$

$$S = 50.(13,041211)$$

$$S = 652,06$$

Tingkat bunga majemuknya merupakan selisih antara jumlah anuitas dan jumlah pembayaran, yaitu :

$= S - (n.R)$

$= 652,06 - 12(50)$

$= 652,06 - 600$

$= 52,06$

Contoh 2 :

Pada permulaan setiap kuartal, $50 disimpan ke dalam tabungan yan berbunga 6% yang dim,ajemukkan setiap tiga bulan. Carilah saldo rekening tersebut pada akhir tahun ketiga !

Jawab :

Karena tabungan ini dibuat pada awal periode pembayaran, berarti harus dihitung anuitas jatuh tempo. Anuitas tesebut dapat dianggap sebagai anuitas biasa senilai

$50 selama 13 periode dikurangi pembayaran akhir $50 sehingga nilainya adalah sebagai berikut.

$$= R\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right) - R$$

$$= 50\left(\frac{1-(1+0{,}015)^{-13}}{0{,}015}\right) - 50$$

$$= 50(14{,}236830) - 50 = 661{,}84$$

6.8. Rangkuman

1. Nilai majemuk atau jumlah majemuk juga disebut dengan jumlah terakumulasi dan selisih antara nilai majemuk dan nilai pokok awal $S - P$ disebut dengan **bunga majemuk**. Rumus dasar untuk nilai (jumlah majemuk) suatu investasi setelah n periode bunga dalam tingkat bunga majemuk adalah sebagai berikut.
   $S = P(1+r)^n$
2. Tingkat bunga efektif r_e yang ekuivalen dengan tingkat bunga nominal r yang dimajemukkan n kali dalam setahun dinyatakan dalam rumus sebagai berikut.
   $r_e = \left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1$
3. Nilai sekarang adalah nilai pokok P yang harus diinvestasikan pada tingkat bunga periodik r untuk periode bunga n dengan rumus sebagai berikut.
   $P = S(1+r)^{-n}$
4. Nilai majemuk dalam tingkat bunga kontinu dinyatakan dalam rumus sebagai berikut.
   $S = Pe^{rt}$. Selisih antara nilai majemuk kontinyu dan nilai pokok awal $S - P$ disebut dengan **bunga majemuk kontinu.**
5. Nilai sekarang dalam tingkat bunga kontinu dinyatakan dalam rumus sebagai berikut.
   $P = Se^{-rt}$.
6. Anuitas merupakan rangkaian pembayaran tetap yang dilakukan secara berkala pada jangka waktu tertentu.
7. Nilai sekarang dari anuitas merupakan jumlah dari nilai sekarang dari seluruh n pembayaran. Hal ini menggambarkan jumlah yang harus diinvestasikan sekarang untuk membeli seluruh n. Berikut rumus nilai sekarang dari anuitas.

$A = R\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right)$

8. Nilai masa depan dari suatu anuitas merupakan penjumlahan dari nilai masa depan seluruh n pembayaran. Rumus dari nilai masa depan dari suatu anuitas adalah sebagai berikut.

$$S = R.\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

7.9. Latihan Soal

1. Carilah nilai majemuk dan bunga majemuk untuk investasi dan tingkat bunga berikut.
   a. \$6000 selama delapan tahun pada tingkat bunga efektif 8%
   b. \$750 selama 12 bulan pada tingkat bunga efektif 7%.
2. Carilah tingkat bunga efektif yang sesuai dengan tingkat bunga nominal pada soal a hingga e. Bulatkan jawaban hingga tiga angka di belakang koma.
   a. 3% yang dimajemukkan setiap enam bulan.
   b. 5% yang dimajemukkan setiap tiga bulan
   c. 3,5% yang dimajemukkan setiap hari
   d. 6% yang dimajemukkan setiap hari
3. Carilah tingkat bunga majemuk dan tingkat bunga efektif jika dana \$1000 diinvestasikan selama lima tahun pada tingkat bunga tahunan 7% yang dimajemukkan:
   a. Kuartalan
   b. Bulanan
   c. Mingguan
   d. Harian
4. Selama periode 5 tahun, nilai pokok awal senilai \$2000 diakumulasikan menjadi \$2950 dalam tabungan yang bunganya dimajemukkan setiap tiga bulan. Carilah tingkat bunga efektifnya !
5. Anggaplah bahwa selama periode enam tahun, dana sebesar \$1000 diakumulasikan menjadi \$1959 dalam satu sertifikat investasi yang bunganya dimajemukkan setiap tiga bulan. Carilah tingkat bunga nominalnya, yang dimajemukkan setiap tiga bulan !

6. Suatu sertifikat deposito senilai $6000 dibeli sebesar $6000 dan dipegang selama tujuh tahun. Jika sertifikat ini menghasilkan tingkat bunga efektif 8%, berapa dana yang diperoleh pada akhir periode tersebut ?
7. Anggaplah mengenyam pendidikan di Universitas tertentu memakan biaya $25.500 untuk periode tahun ajaran 2009-2010. Biaya ini meliputi biaya pendaftaran, ruang kuliah, papan tulis, buku dan biaya lainnya. Dengan asumsi tingkat inflasi efektif adalah 3% untuk biaya-biaya tersebut, carilah berapa biaya kuliah pada tahun ajaran 2015-2016.
8. Berapa waktu yang dibutuhkan untuk suatu nlai pokok P agar berlipat ganda jika dananya yang senilai 12% dimajemukkan tiap bulan? Berikan jawaban anda hingga bulan terekat.
9. Berapakah hasil yang didapatkan dari dana $2000 dalam kurun delapan tahun jika diinvestasikan pada tingkat bunga efektif 6% selama empat tahun pertama dan 6% dimajemukkan setiap enam bulan pada empa tahun berikutnya ?
10. Berapa waktu yang dibutuhkan agar dana $100 menjadi $1000 jika diinvestasikan pada tingkat bunga majemuk 6% yang dimajemukkan setiap bulan? Berikan jawaban anda dalam bentuk tahun, bulatkan hingga dua angka dibelakan koma.
11. Seorang investor memiliki pilihan menginvestasikan sejumlah uang pada tingkat bunga majemuk 8% yang dimajemukkan setiap tahun atau pada 7,8% yang dimajemukkan setiap enam bulan. Manakah yang lebih baik?
12. Pada tingkat bunga nominal berapakah jika dimajemukkan tiap bulan yang sesuai dengan tingkat bunga efektif 4,5% ?
13. Anggaplah bahwa $700 diakumulasikan hingga $801,06 dalam sebuah tabungan setelah dua tahun. Apabila tingkat bunga dimajemukkan setiap tiga bulan, carilah tingkat bunga nominalnya (dimajemukkan tiap 3 bulan) yang dihasilkan dari dana tersebut !
14. Carilah nilai sekarang dari opembayaran masa mendatang berikut dengan tingkat bunga tertentu.
    a. $6000, 20 tahun dari sekarang dengan bunga 5% yang dimajemukkan setiap tahun
    b. $3500, 8 tahun dari sekarang dengan bunga efektif 6%

c. $4000, 12 tahun dari sekarang dengan bunga 7% yang dimajemukkan setiap tahun

d. $1950, 3 tahun dari sekarang dengan bunga 16% yang dimajemukkan setiap bulan

e. $9000, 5 tahun dari sekarang dengan bunga 8% yang dimajemukkan setiap tiga bulan

f. $6000, 6 tahun dari sekarang dengan bunga 10% yang dimajemukkan setiap enam bulan

g. $8000, 5 tahun dari sekarang dengan bunga 10% yang dimajemukkan setiap tiga bulan

h. $500, 3 tahun dari sekarang dengan bunga 8% yang dimajemukkan tiap 3 bulan

i. $5000, 3 tahun dari sekarang dengan bunga 7% yang dimajemukkan setiap hari

j. $1250, 1 tahun dari sekarang dengan bunga 13% yang dimajemukkan setiap minggu.

15. Suatu rekening tabungan berbunga 5,3% per tahun, yang dimajemukkansetiap bulan. Berapa banyak yang harus disimpan sekarang agar tabungan ini tepat menghasilkan $12000 pada akhir tahun?
16. Suatu dana perwalian untuk anak 10 tahun dirancang melalui oembayaran tunggal sehingga pada umur ke-21 anak tersebut akan menerima $27000. Carilah pembayaran tersebut dengan asumsi tingkat bunga 6% dimajemukkan setiap enam bulan !
17. Utang $750 yang jatuh tempo 10 tahun dan $250 yang jatuh tempo 12 tahun akan dilunasi sekarang melalui pembayaran tunggal. Carilah berapa pembayaran tersebut apabila tingkat bunga 8% dimajemukkan setiap 3 bulan !
18. Utang $600 yang jatuh tempo tiga tahun dan $800 yang jatuh tempo empat tahun akan dilunasi melalui pembayaran tunggal dua tahun dari sekarang. Apabila tingkat bunganya 8% yang dimajemukkan setiap enam bulan, berapa banyak pembayaran tersebut nanti?
19. Utang $7000 yang jatuh tempo lima tahun akan dilunasi melalui pembayaran senilai $3000 saat ini dan pembayaran kedua pada akhir tahun kelima. Berapa

banyak pembayaran tahun kelima tersebut apabila tingkat bunga 8% dimajemukkan setiap bulan ?

20. Utang sebesar \$5000 yang jatuh tempo lima tahun dari skarang dan \$5000 yang jatuh tempo sepuluh tahun dari sekarang akan dilunasi melalui pembayaran \$2000 dalam waktu dua tahun, pembayaran \$4000 dalam waktu empat tahun dan pembayaran terakhir pada akhir tahun keenam. Jika bunganya adalah 2,5% yang dimajemukkan per tahun, berapakah pembayaran terakhir tersebut ?
21. Utang \$3500 yang jatuh tempo empat tahun dan \$5000 yang jatuh tempo enam tahun akan dilunasi melalui pembayaran tunggal \$1500 saat ini dan tiga pembayaran yang sama yang dibayar pada setiap tahun berikutnya dari sekarang. Jika bunganya adalah 7% yang dimajemukkan per tahun, berapakah masing-masing dari tiga pembayaran yang sama tersebut ?
22. Anggaplah seseorang mmiliki pilihan investasi \$10000 berikut :

    a. Mengalokasikan dana tersebut pada tabungan dengan bunga 6% yang dimajemukkan setiap enam bulan

    b. Berinvestasi dalam bisnis sehingga nilai investasinya setelah 8 tahun adalah \$16000.

    Manakah pilihan yang lebih baik ?
23. A memiliki dua utang kepada B : \$1000 dan bunga 7% yang dimajemukkan setiap tahun, yang jatuh tempo lima tahun, dan \$2000 dengan bunga 8% yang dimajemukkan setiap enam bulan, yang jatuh tempo tujuh tahun. Jika kedua utang ini akan dilunasi melalui pembayaran tunggal pada akhir tahun keenam, carilah jumlah pembayaran tersebut apabila uang tersebut berbunga 6% yang dimajemukkan per tiga bulan.
24. Carilah nilai sekarang dari \$10000 untuk kurun waktu 10 tahun pada suatu bank dengan bunga 10% yang dimajemukkan setiap hari. Asumsikan bahwa bank menggunakan perhitungan 360 hari dalam menentukan tingkat bunga harian dan terdapat 365 hari dalam setahun, yang berarti bunga tersebut dimajemukkan 365 kali setahun !

25. Carilah nilai majemuk dan bunga majemuk apabila \$4000 diinvestasikan selama enam tahun dan bunanya dimajemukkan secara kontinyu pada tingkat bunga tahunan berikut :

a. $6\frac{1}{4}\%$ b. 9%

26. Carilah nilai sekarang dari \$2500 yang jatuh tempo 8 tahun dari sekarang apabila bunga dimajemukkan secara kontinyu pada tingkat bunga tahunan berikut.

a. $1\frac{1}{2}\%$ b. 8%

27. Carilah bunga efektif yang sesuai dengan tingkat bunga tahunan yang dimajemukkan secara kontinu beikut.

a. 4% b. 8% c. 7% d. 11%

28. Jika \$1000 didepositokan pada tabungan yang berbunga tahunan $4\frac{1}{2}\%$ yang dimajemukkan secara kontinu, berapakah nilai rekening tersebut pada akhir tahun kedua ?

29. Jika \$1000 diinvestasikan dengan tingkat bunga tahunan 3% yang dimajemukkan secara kontinu, carilah nilai majemuknya pada akhir tahun ke 8 ?

30. Dewan direksi suatu perusahaan sepakat untuk menebus sebagian saham preferen yang dapat ditarik sebelum jatuh tempo dalam lima tahun. Saat keputusan tersebut dibuat, \$1.000.000 dibutuhkan. Jika perusahaan dapat menginvestasikan dana dengan tingkat bunga 5% yang dimajemukkan secara kontinu, berapa banyak yang harus diinvestasikan saat ini sehingga nilai masa depannya cukup untuk menebus saham tersebut ?

31. Suatu dana perwalian dibuat melalui pembayaran tunggal sehingga pada akhit tahun ke 30 akan terkumpul dana sebesar \$50.000. Jika bunga dimajemukkan secara kontinu pada tingkat bunga tahunan 6% berapa banyak uang yang harus dibayarkan sejak awal ?

32. Sebagai hadiah ulang tahun ke 21 untuk anak mereka yang baru lahir, keluarga Smith ingin memberikan sejumlah uang yang nilainya setara dengan \$21.000 saat dia lahir. Untuk melakukan hal ini, mereka akan membuat pembayaran awal ke dalam dana perwalian yang dirancang khusus untuk tujuan ini.

a. Asumsikan bahwa tingkat inflasi efektif tahunan adalah 3,5%. Dalam kurun waktu 21 tahun, berapa jumlah dana yang nilainya akan setara dengan $21.000 saat anak perempuan keluarga Smith ini lahir ?

b. Berapakah jumlah pembayaran awalnya apabila bunga dimajemukkan secara kontinu pada tingkat bunga tahunan 3,5% ?

33. Saat ini keluarga Smith memiliki dana $50.000 untuk investasi selama 18 bulan. Mereka memiliki 2 pilihan :

    a. Menginvestasikan uang tersebut dalam sertifikat berbunga dengan tingkat bunga nominal 5% yang dimajemukkan per tiga bulan.

    b. Menginvestasikan uang tersebut dalam tabungan yang berbunga tahunan 4,5% yang dimajemukkan secara kontinu.

    Berapa banyak uang yang akan mereka miliki dalam kurun waktu 18 bulan pada setiap pilihan di atas ?

34. Berapa tingkat bunga tahunan yang dimajemukkan secara kontinu yang ekuivalen dengan tingkat bunga efektif 5% ?

35. Berapa tingkat bunga tahunan r yang dimajemukkan secara kontinu yang ekuivalen dengan tingkat bunga nominal 6% yang dimajemukkan setiap enam bulan ?

36. Jika bunga dimajemukkan secara kontinu pada tingkat bunga tahunan 0,07%, berapa tahun yang dibutuhkan agar nilai pokok P berlipat tiga? Berikan jawaban anda hingga tahun terdekat !

37. Jika bunga dimajemukkan secara kontinu, pada tingkat bunga tahunan berapa suatu nilai pokok akan berlipat ganda dalam kurun waktu 20 tahun? Berikan jawaban anda dalam bentuk persentase hingga dua angka di belakang koma!

38. Pada tanggal 1 Juli 2001, Mr. Green memiliki $1000 dalam rekening tabungan di First National Bank. Rekening ini erbunga tahunan 3,5% yang dimajemukkan secara kontinu. Bank saingan berupaya menarik nasabah baru dengan menawarkan bonus $0 pada rekening baru yang dibuka dengan setoran awal minimum $1000 dan rekening baru ini akan mendapatkan bunga tahunan 3,5% yang dimajemukkan setiap enam bulan.

    Mr. Green memutuskan untuk memilih salah satu dari tiga pilihan berikut ini pada 1 Juli 2001 :

a. Menyimpan uang di dlaman First National Bank
b. Memindahkan rekening ke bank saingan
c. Menyimpan setengah bagian uang di First National Bank dan memindahkan setengah bagian lainnya ke rekening bank saingan. Untuk setiap pilhan ini, carilah akumulasi nilai rekening pada tanggal 1 Juli 2003.

39. a. Pada 1 November 1996, Ms. Rodgers menginvestasikan \$10.000 pada deposito berjangka 10 tahun yang berbunga tahunan 4% yang dimajemukkan secara kontinu. Saat deposito jatuh tempo pada 1 November 2006, dia menginvestasikan seluruh dananya pada obligasi perusahaan, yang berbunga tahunan 5% yang dimajemukan per tahun. Berapa akumulasi nilai investasi Ms. Rodgers pada 1 November 2011? Berikan Jawaban anda hingga dolar terdekat.

    b. Jika Ms. Rodgers telah melakukan investasi tunggal \$10.000 pada tahun 1996 yang jatuh tmpo pada tahun 2011 dan memiliki tingkat bunga efektif 4,5%, apakah akumulasi nilai investasinya akan leih banyak atau sedikit dibandingkan dengan bagian a dan berapa banyak selisihnya (hingga dolar tedekat) ?

40. Anggaplah anda memiliki \$9000 untuk diinvestasikan.

    a. Jika anda berinvestasi di First National Bank dengan tingkat bunga nominal 5% yang dimajemukkan setiap tiga bulan, carilah akumulasi nilai investasi ini pada akhir tahun.

    b. First National Bank juga menawarkan sertifikat deposito yang berbunga 5,5% yang dimajemukkan secara kontinu. Akan tetapi, setoran awal minimum \$10.000 harus dilakukan. Karena anda hanya memiliki \$9000, bank bersedia memberikan pinjaman satu tahun senilai \$1000 yang anda perlukan. Bunga pinjaman ini pada tingkat bunga efektifnya adalah 8% dan baik nilai pokok dan bunganya diayarkan pada akhir tahun tersebut. Carilah apakah strategi investasi ini lebih atau kurang menguntungkan dibandingkan strategi bagian a !

41. Apabila bunga dimajemukkan secara kontinu dengan tingkat hunga tahunan 3%, berapa tahun yang diperlukan sgsr nilsi pokok berlipst gsnds? Berikan jawaban hingga dua angka di belakang koma !

42. Carilah nilai sekarang dari anuitas biasa berikut.

a. $600 per tahun selama enam tahun pada tingkat bunga 6% yang dimajemukkan per tahun

b. $1000 setiap enam bulan selama empat tahun pada tingkat bunga 8% yang dimajemukkan setiap enam bulan.

c. $2000 per kuartal selama 4,5 tahun pada tingkat bunga 8% yang dimajemukkan setiap kuartal.

d. $1500 per bulan selama 15 bulan pada tingkat bunga 9% yang dimajemukkan setiap bulan.

43. Carilah nilai sekarang dari anuitas jatuh tempo berikut.

a. $900 yang dibayarkan pada setiap awal periode enam bulanan selama tujuh tahun dengan bunga 8% yang dimajemukkan setiap enam bulan.

b. $150 yang dibayarkan pada setiap awal bulan selama lima tahun dengan bunga 7% yang dimajemukkan setiap bulan.

44. Carilah nilai sekarang dari anuitas berikut (biasa).

a. $2000per bulan selama tiga tahun dengan bunga 15% yang dimajemukkan setiap bulan.

b. $600 per kuartal selama empat tahun dengan bunga 8% yang dimajemukkan setiap kuartal.

c. $5000 per tahun selama 20 tahun dengan bunga 7% yang dimajemukkan setiap kuartal.

d. $2500 per bulan selama 4 tahun dengan bunga 6% yang dimajemukkan setiap bulan.

45. Carilah nilai masa depan dari anuitas jatuh tempo berikut.

a. $1200 per tahun selama 12 tahun dengan bunga 8% yang dimajemukkan setiap tahun

b. $600 per kuartal selama 7,5 tahun dengan bunga 10% yang dimajemukkan kuartalan.

46. Untuk tingkat bunga 4% yang dimajemukkan setia bulan, carilah nilai sekarang dari anuitas $150 pada setiap akhir bulan selama delapan bulan dan $175 setiap akhir bulan setelahnya selama dua tahun mendatang.

47. Suatu perusahaan ingin menyewakan ruang kantor sementara selama periode enam bulan. Biaya sewanya adalah \$1500 per bulan, dibayar di muka. Anggaplah perusahaan ini ingin melakukan pembayaran sekaligus pada awal periode sewa untuk membayar seluruh biaya sewa yang jatuh tempo enam bulan. Jika uang tersebut berbunga 9% yang dimajemukkan setiap bulan, berapakah pembayaran tersebut ?
48. Suatu anuitas yang terdiri dari pembayaran yang sama setiap akhir kuartal selam tiga tahun akan dibeli senilai \$15000. Jika tingkat bunganya adalah 4% yang dimajemukkan setiap tiga bulan, berapakah masing-masing pembayaran ini ?
49. Sebuah mesin dibeli seharga \$3000 di muka dan pembayaran \$250 dilakukan setiap akhir semester selama enam tahun. Jika bunganya adalah 8% yang dimajemukkan setiap enam bulan, carilah harga tunai mesin tersebut yang sesuai!
50. Anggaplah dana \$50 disimpan ke dalam tabungan pada setiap akhir bulan selama empat tahun. Jika tambahan simpanan tidak dilakukan
    a. Berapa banyak saldo rekening tersebut setelah enam tahun
    b. Berapa banyak jumlah ini yang merpakan bunga majemuk? Asumsikan bahwa tabungan tersebut berbunga 6% yang dimajemukkan setiap bulan !
51. Penerima manfaat dari suatu polis asuransi memiliki pilihan untuk menerima pembayaran sekaligus senilai \$275.000 atau 10 pembayaran yang sama setiap tahunnya, di mana pembayaran pertama langsung dibayarkan. Jika bunganya adalah 3,5% yang dimajemukkan setiap tahun, carilah pembayaran tahunan tersbut !
52. Dalam kurun waktu 10 tahun, mesin seharga \$40.000 akan memiliki nilai sisa \$4000. Mesin baru pada saat tersebut diharapkan akan dijual seharga \$52000. Dalam rangka menyediakan dana untuk menutup selisih antara biaya penggantian dan nilai sisa, dana pembayaran utang dirancang dimana pembayaran yang sama dilakukan pada setiap akhir tahun. Jika dana tersebut berbunga 7% yang dimajemukkan setiap tahun, berapa jumlah masing-masing pembayaran ini ?

53. Suatu perusahaan kertas mempertimbangkan untuk membeli lahan hutan yang diperkirakan akan menghasilkan pengembalian tahunan sebesar \$60000 selama 8 tahun, yang setelah 8 tahun hutan tersebut tidak akan bernilai. Perusahaan ini ingin mendapatkan 6% pengembalian investasinya dan juga merancang dana pelunasan untuk menggantikan harga pembelian. Jika uang yang disimpan ke dalam dana tersebut setiap akhir tahun berbunga 4% yang dimajemukkan setiap tahun, carilah harga yang dibayar perusahaan ini untuk membeli lahan hutan tersebut. Bulatkan jawaban anda hingga ratusan dolar terdekat.
54. Suatu anuitas dengan R dolar yang dibayarkan setiap tahun melalui pembayaran seragam yang dibayar secara kontinu disebut dengan anuitas kontinu. Nilai sekarang dari anuitas kontinu selama t tahun adalah

    $R.\frac{1-e^{-rt}}{r}$

    Dimana r adalah tingkat bunga tahnan yang dimajemukkan secara kontinu. Carilah nilai sekarang dari anuitas kontinu \$100 setahun selama 20 tahun pada bunga 5% yang dimajemukkan secara kontinu.
55. Seorang agen asuransi menawarkan layanan kepadaklien yang peduli akan rencana keuangan pada masa pensiun mereka. Untuk menekankan manfaat berinvestasi sejak dini, dia menerangkan bahwa seseorang yang berusia 25 tahun yang menabung \$2000 per tahun selama 10 tahun (dan tidak menabung lagi setelah umur 34 tahun) akan mendapatkan lebih banyak dana pendiun ketimbang menunggu 10 tahun dan kemudian menabung \$2000 per tahun dari umur 35 tahun hingga pensiun pada umur 65 thaun (30 kali menabung). Carilah penerimaan bersih (nilai majemuk dikurangi total tabungan) pada umur 65 tahun untuk kedua situasi tersebut. Asumsikan adanya tingkat bunga tahunan efektif 7% dan anggaplah bahwa tabungan ini dilakukan setiap awal tahun. Bulatkan jawaban anda hingga dolar terdekat.

56. Anggaplah suatu bisnis memiliki laba tahunan \$40000 selama lima tahun ke depan dan labanya diperoleh secara kontinu setiap tahunnya. Kemudian laba ini dapat dianggap sebagai suatu anuitas kontinu (Lihat soal no 54). Jika uang ini berbunga 4% yang dimajemukkan secara kontinu, carilah nilai sekarang dari laba tersebut.

==

Jalani hidup ini dengan penuh kegembiraan,
jangan memperbandingkan hidup kita dengan orang lain.
Sebab hidup adalah perjalanan, bukan pertandingan.

==

BAB VIII PERMINTAAN DAN PENAWARAN

Tujuan Instruksional :

Setelah mengikuti perkuliahan dengan materi dari Bab VIII, diharapkan mahasiswa mampu :

- Memahami konsep permintaan.
- Memahami konsep penawaran.
- Memahami konsep titik keseimbangan dari fungsi permintaan dan fungsi penawaran.
- Menerapkan konsep permintaan dan penawaran dalam penyelesaian masalah bisnis.

Aktivitas ekonomi merupakan bagian dari kehidupan manusia sejak ribuan tahun yang lalu. Dalam banyak hal konsep dasar ekonomi hanya diekspresikan dalam bentuk matematika sederhana, seperti bilangan bulat atau pecahan diikuti dengan operasi sederhana seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Namun dengan berkembangnya kehidupan manusia, maka aktivitas ekonomi yang dilakukan semakin kompleks dan makin saling terkait dengan aktivitas lainnya, sehingga membutuhkan pemecahan yang kompleks juga.

Bab ini khusus akan mempelajari penerapan dari dasar matematika pada dunia bisnis. Tujuan dari pertemuan ini adalah, agar dapat membuat analisis dalam dunia bisnis dengan lebih sistematis dan praktis, karena melalui sifat matematika, maka diperoleh beberapa keuntungan, yaitu membuat persoalan menjadi lebih sederhana, menggunakan logika lengkap dengan asumsi-asumsinya, dapat menggunakan variabel yang sebanyak-banyaknya, berdasar sifat generalisasi.

Tentunya sangat banyak aplikasi matematika dalam dunia bisnis, namun pada bab ini hanya akan dibahas tentang Fungsi Permintaan, Fungsi Penawaran, Keseimbangan Pasar, dilengkapi dengan Pajak dan Subsidi. Hal ini menyesuaikan dengan jumlah jam pertemuan pada pertemuan 13 dari mata kuliah Matematika Bisnis ini.

8.1. Fungsi Permintaan (Demand)

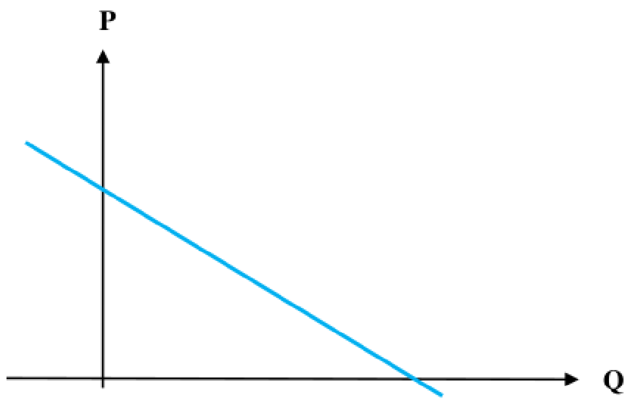
Permintaan adalah banyaknya jumlah barang yang diminta pada suatu pasar tertentu dengan tingkat harga tertentu pula.

Secara matematis, jumlah barang yang diminta dilambangkan dengan Q (berasal dari kata Quantitas = kuantitas), sedang harga barang dinyatakan dengan P (berasal dari kata Prize = harga).

Dalam hubungan antara P dan Q, maka Q sebagai variabel bebas, dan P sebagai variabel terikat. Asumsi ini didasarkan karena jumlah barang yang diminta akan mempengaruhi berapa harga yang dibayar.

Dalam hukum permintaan dinyatakan bahwa hubungan antara jumlah barang yang diminta dengan harga barang berbanding terbalik yaitu ketika harga meningkat atau naik maka jumlah barang yang diminta akan menurun dan sebaliknya apabila harga turun jumlah barang meningkat.

Secara grafis, fungsi permintaan dapat digambarkan seperti Gambar 8.1.



Gambar 8.1. Grafik Fungsi Permintaan (*Demand*)

Grafik fungsi permintaan selalu condong ke kanan, dan mempunyai gradien negatif, karena bersesuaian dengan hukum permintaan.

Persamaan umum fungsi permintaan :

$$\boxed{P_d = a + bQ_d}$$

di mana : P_d = harga pada fungsi permintaan

Q_d = jumlah barang yang diminta

b = gradien, selalu bertanda negatif untuk fungsi permintaan

Contoh 1 :

Suatu produk jika harganya Rp 100,- maka jumlah permintaan = 10 unit, dan bila harganya turun menjadi Rp 75,- maka jumlah permintaannya = 20 unit. Tentukan

a. Fungsi permintaan

b. Berapa barang yang diminta, jika harga nya menjadi Rp 110,-?

Jawab :

a. Persamaan umum fungsi permintaan : $P_d = a + bQ_d$

Untuk P = 100, maka Q = 10, sehingga persamaan fungsi permintaan : 100 = a + b.10

Untuk P = 75, maka Q = 20, sehingga persamaan fungsi permintaan : 75 = a + b.20

Dari kedua persamaan tersebut, dapat dicari konstanta a dan b dengan metode eliminasi :

$$\begin{array}{rl} a + 10\,b & = 100 \\ a + 20\,b & = 75 \\ \hline -10\,b & = 25 \\ b & = -\,2.5 \end{array} \; -$$

Karena telah diketahui b = -2.5, maka dapat ditentukan nilai a, yaitu :

$$a + 10b = 100$$
$$a + 10\,(-2.5) = 100$$
$$a - 25 = 100$$
$$a = 125$$

Sehingga persamaan fungsi permintaannya adalah :

$$P = 125 - 2.5\,Q$$

b. Dari jawaban no a, didapatkan persamaan fungsi permintaan adalah : P = 125 – 2.5 Q

Jika P = 200, maka 110 = 125 – 2.5 b

$$-15 = -2.5\,Q$$
$$Q = 6$$

Jadi, jika harga barang menjadi Rp 110,-, maka banyaknya barang yang diminta sejumlah 6 buah

Contoh 2 :

Diketahui suatu f.permintaan adalah : $P_d = 36 - 4Q_d$.

a. Jika harganya Rp 16,- , tentukan berapa jumlah produk yang diminta?

b. Berapa harga maksimal yang dapat dibayar oleh konsumen atas produk tersebut ?

c. Jika produk tersebut dibagikan secara cuma-cuma, berapa jumlah produk yg diminta ?

Jawab :

a. Dari persamaan $P_d = 36 - 4Q_d$, dan $P_d = 16$, maka didapat nilai Q yaitu :

$$16 = 36 - 4Q_d$$

$$-20 = - 4Q_d \text{ , atau } Qd = 5$$

Jadi jumlah produk yang diminta sebanyak 5 buah

b. Sesuai dengan hukum fungsi permintaan, maka harga maksimal dapat tercapai jika banyak barang yang diminta = 0 . Sehingga dari persamaan $P_d = 36 - 4Q_d$, dan $Q_d = 0$, sehingga

$Pd = 36 - 4.0 = 36$, atau harga maksimal dicapai pada P_d = Rp 36,-

c. Produk dibagikan secara cuma-cuma, ini berarti P_d = Rp 0,-, sehingga dari persamaan

$P_d = 36 - 4Q_d$, akan didapat $0 = 36 - 4Q_d$, sehingga $36 = 4\ Q_d$, atau $Q_d = 9$.

Ini berarti jika produk dibagikan secara cuma- cuma, maka akan ada sebanyak 9 barang yang diminta.

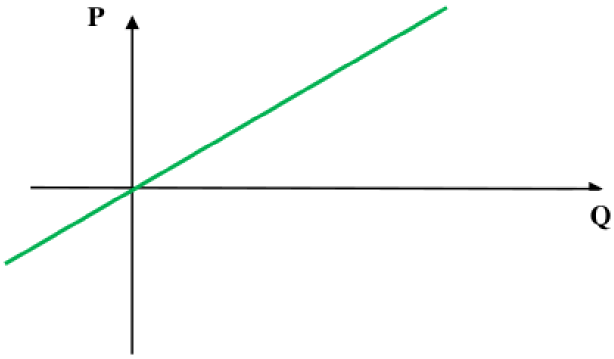
8.2. Fungsi Penawaran (Supply)

Penawaran adalah banyaknya barang yang ditawarkan oleh penjual pada suatu pasar tertentu, pada periode tertentu, dan pada tingkat harga tertentu.

Secara matematis, jumlah barang yang diminta dilambangkan dengan Q (berasal dari kata Quantitas = kuantitas), sedang harga barang dinyatakan dengan P (berasal dari kata Prize = harga).

Dalam hukum penawaran dinyatakan bahwa hubungan antara jumlah barang yang ditawarkan dengan harga barang berbanding lurus, yaitu ketika harga meningkat atau naik maka jumlah barang yang ditawarkan diharapkan juga terjual meningkat dan sebaliknya apabila harga turun jumlah barang juga turun.

Secara grafis, fungsi penawaran dapat digambarkan seperti Gambar 8.2.



Gambar 8.2. Grafik Fungsi Penawaran (*Supply*)

Grafik fungsi penawaran selalu condong ke kiri, dan mempunyai gradien positif, karena bersesuaian dengan hukum penawaran.

Persamaan umum fungsi penawaran:

$$\boxed{P_s = a + bQ_s}$$

di mana : P_s = harga pada fungsi penawaran

Q_s = jumlah barang yang ditawarkan

b = gradien, selalu bertanda positif untuk fungsi penawaran

Contoh 1 :

Suatu produk, jika harganya Rp 500,- maka jumlah barang yang ditawarkan adalah = 60 unit, dan bila harganya naik menjadi Rp 700,- maka jumlah barang yang ditawarkan menjadi = 100 unit.

a. Tentukan persamaan f. penawaran dari kasus di atas.
b. Berapa barang yang ditawarkan jika harga nya turun menjadi Rp 600 ?

Jawab :

a. Persamaan umum fungsi penawaran : $P_s = a + bQ_s$

Untuk P = 500, maka Q = 60, sehingga persamaan fungsi penawaran : 500 = a + b. 60

Untuk P = 700, maka Q = 100, sehingga persamaan fungsi penawaran : 700 = a + b.100

Dari kedua persamaan tersebut, dapat dicari konstanta a dan b dengan metode eliminasi :

$$a + 60\,b = 500$$
$$a + 100\,b = 700$$
$$\underline{\hspace{6cm}} \; -$$
$$-40\,b = -200$$
$$b = 5$$

Karena telah diketahui b = 5, maka dapat ditentukan nilai a, yaitu :

$$a + 100\,b = 700$$
$$a + 100 . 5 = 700$$
$$a + 500 = 700$$
$$a = 200$$

Sehingga persamaan fungsi permintaannya adalah :

$P_s = 200 + 5\,Q_s$

Contoh 2 :

Diketahui suatu f.penawaran suatu barang adalah : $\mathbf{P_s = 4Q_s + 4}$.

a. Jika harganya Rp 124,- , tentukan berapa jumlah produk yg ditawarkan ?
b. Berapa harga yang ditawarkan sehingga tidak ada jumlah barang yang ditawarkan?

Jawab :

a. Dari persamaan penawaran : $\mathbf{P_s = 4Q_s + 4}$, maka dapat diketahui berapa barang yang ditawarkan, yaitu dengan mengganti $P_s = 124$, sehingga :

$$124 = 4Q_s + 4$$
$$120 = 4Q_s$$
$$Q_s = 30$$

Jadi jumlah barang yang ditawarkan : $Q_s = 30$

b. Tidak ada barang yang ditawarkan berarti $Q_s = 0$, sehingga :

$$P_s = 4Q_s + 4$$
$$P_s = 4.0 + 4 = 4$$

Jadi harga yang ditawarkan sehingga tidak ada barang adalah Rp 4,-

8.3. Keseimbangan Pasar / *Equilibrium*

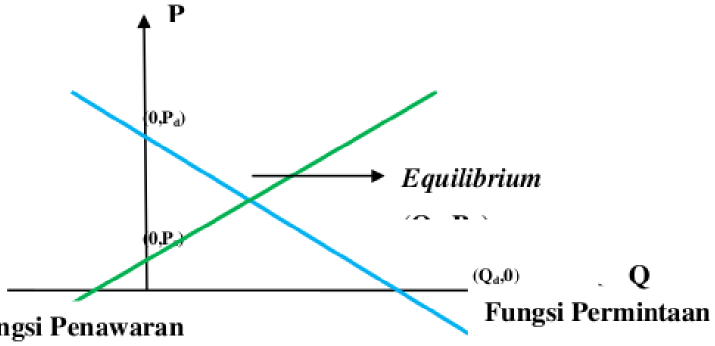
Setelah dipelajari tentang Fungsi permintaan dan fungsi penawaran, maka sekarang akan dipelajari tentang keseimbangan pasar.

Suatu barang dikatakan berada dalam keseimbangan (*equilibrium*) apabila jumlah barang yang diminta di pasar sama dengan jumlah barang yang ditawarkan .

Keseimbangan pasar ini akan menciptakan harga dan jumlah keseimbangan di pasar. Syarat untuk mencapai keseimbangan pasar ini adalah jumlah produk yang diminta oleh konsumen harus sama dengan jumlah produk yang ditawarkan oleh produsen ($Q_d = Q_s$), atau harga produk yang diminta oleh konsumen harus sama dengan harga produk yang ditawarkan oleh produsen ($P_d=P_s$).

Secara matematis, keseimbangan pasar dapat diperoleh dengan mengerjakan sistem persamaan linear antara fungsi permintaan dan fungsi penawaran.

Sedang secara geometri, ditunjukkan dengan perpotongan antara kurva permintaan dan kurva penawaran, seperti tampak pada gambar ....



Gambar 8.3. Gafik yang Menunjukkan Titik Ekuilibrium

Contoh 1 :

Jika fungsi permintaan dan penawaran suatu barang ditunjukkan oleh :

Fgs permintaan : $Q_d = 15 - 2P_d$

Fgs penawaran : $Q_s = 3P_s - 3$

Maka tentukan harga dan jumlah keseimbangan pasar yang terjadi !

Jawab :

Syarat keseimbangan pasar adalah $Q_d = Q_s$, sehingga ubah dahulu persamaan dalam Q menjadi :

$$15 - 2P = 3P - 3$$

$-5P = -18, P = 3,6$

Untuk $P = 3.6$ maka $Q = 3.3,6 - 3 = 10.8 - 3 = 7.8$

Sehingga keseimbangan pasar terjadi pada $P = 3.6$ dan $Q = 7.8$

Contoh 2 :

Jika fungsi permintaan dan penawaran suatu barang ditunjukkan oleh :

Fgs permintaan : $P_d = 12 - 5Q_d$

Fgs penawaran : $P_s = 4 + 4Q_s$

Maka tentukan harga dan jumlah keseimbangan pasar yang terjadi !

Jawab :

Syarat keseimbangan pasar adalah $P_d = P_s$, sehingga ubah dahulu persamaan dalam Q menjadi :

$12 - 5Q = 4 + 4Q$

$-9Q = -8, Q = 0,89$

Untuk $Q = 0.89$ maka $P = 12 - 5 . 0.89 = 12 - 4.45 = 7.55$

Sehingga keseimbangan pasar terjadi pada **$P = 7.55$ dan $Q = 0.89$**

8.4. Pajak dan Subsidi

Terhadap suatu produk, dapat dikenakan pajak atau subsidi. Pajak dapat menyebabkan harga menjadi naik, sedang subsidi mengurangi harga. Setelah dikenai pajak/subsidi, maka keseimbangan pasar tentunya berubah.

Baik pajak maupun subsidi dikenakan pada fungsi penawaran, dan bukan pada fungsi permintaan.

Terdapat dua jenis pajak atau subsidi, yaitu :

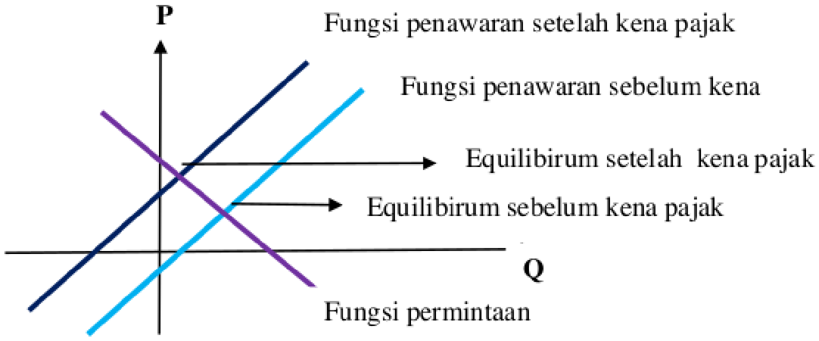
1. Pajak/subsidi spesifik, yaitu pajak/subsidi yang dikenakan pada setiap unit barang.
2. Pajak/subsidi proporsional, yaitu pajak/subsidi yang ditetapkan berdasar presentase tertentu dari harga jual.

Akan dibahas masing-masing perhitungan pajak dan subsidi.

8.4.1. Pajak

Pajak terhadap penjualan suatu barang menyebabkan harga jual barang tersebut naik. Setelah dikenakan pajak, produsen akan mengalihkan (sebagian) beban pajak tersebut ke konsumen, yaitu dengan jalan menawarkan harga jual yang lebih tinggi. Oleh karenanya, pajak dikenakan pada fungsi penawaran.

Secara grafik, pengaruh pajak dapat dilihat pada gambar ....



Gambar 8.4. Pengaruh Pajak

Jenis pajak :

a. Pajak Spesifik

Pajak spesifik adalah pajak yang dikenakan pada setiap unit barang. Jika pemerintah mengenakan pajak t per unit pada produk tertentu, akan mengakibatkan harga produk tersebut naik dan jumlah barang yang diminta/ditawarkan atas barang tersebut akan berkurang.

Karena pajak hanya dibebankan pada fungsi penawaran, maka rumus untuk fungsi penawaran menjadi :

$$P_s = a + bQ_s + t \qquad (\text{ t= tax = pajak})$$

Contoh 1 :

Jika diketahui : Fungsi permintaan suatu barang P = 15 – Q, dan fungsi penawaran adalah

P = 3 + 0,5 Q. Terhadap barang tsb dikenakan pajak spesifik sebesar Rp. 3,- /unit.

Berapa harga keseimbangan (P) dan jumlah keseimbangan (Q) :

a. sebelum dikenai pajak ?

b. sesudah dikenai pajak ?

Jawab :

a. Keseimbangan sebelum pajak :

$P_s = P_d$

$15 – Q = 3 + 0{,}5\ Q$

$12 = 1.5\ Q$, sehingga $Q = 8$

$P = 15 – 8 = 7$

Jadi keseimbangan pasar terjadi pada $P = 7$ dan $Q = 8$

b. Dikenakan pajak sebesar Rp 3,- / unit, sehingga persamaan fungsi penawaran menjadi :

$P_s = 3 + 0.5Q_s + 3 = 6 + 0.5\ Q_s$

Sehingga keseimbangan pasar terjadi :

$P_s = P_d$

$15 – Q = 6 + 0{,}5\ Q$

$9 = 1.5\ Q$, sehingga $Q = 6$

$P = 15 – 6 = 9$

Jadi keseimbangan pasar setelah kena pajak terjadi pada $P = 9$ dan $Q = 6$.

Seperti pada penjelasan sebelumnya, pajak akan menaikkan harga jual, seperti terlihat pada contoh soal di atas.

Contoh 2 :

Jika diketahui fungsi permintaan $P_d = - 0.5\ Q_d + 12$ dan $P_s = 0.5Q_s + 5$ dan dikenakan pajak sebesar Rp 6,-/unit.

Berapa harga keseimbangan (P) dan jumlah keseimbangan (Q) :

a. sebelum dikenai pajak ?

b. sesudah dikenai pajak ?

Jawab :

a. Keseimbangan sebelum pajak :

$P_d = P_s$

$- 0.5\ Q + 12 = 0.5Q + 5$

$- Q = -7$

$Q = 7$

$P = - 0.5\ Q + 12 = - 0.5 . 7 + 12 = 8.5$

Jadi keseimbangan pasar terjadi pada P = 8.5 dan Q = 7

b. Keseimbangan setelah pajak :

Dikenakan pajak sebesar Rp 10,- / unit, sehingga persamaan fungsi penawaran menjadi :

$P_s = 0.5Q_s + 5 + 6 = 0.5Q_s + 11$

Keseimbangan pasar terjadi jika $P_d = P_s$

$- 0.5 Q + 12 = 0.5Q_s + 11$

$- Q = -1$

$Q = 1$

$P = 0.5 . 1 + 11 = 11.5$

Jadi keseimbangan pasar setelah kena pajak terjadi pada P = 11.5 dan Q = 1. Seperti pada penjelasan sebelumnya, pajak akan menaikkan harga jual, seperti terlihat pada contoh soal di atas.

b. Pajak Proporsional

Pajak proporsional adalah pajak yang ditetapkan berdasarkan presentase tertentu dari harga jual.

Karena pajak hanya dibebankan pada fungsi penawaran, maka rumus untuk fungsi penawaran menjadi :

$P_s = (1 + t) (a + bQ_s)$, di mana t = tax/pajak dalam prosentase

Contoh 1 :

1. Jika diketahui : Fungsi permintaan suatu barang $P_d = -Q_d + 25$, dan fungsi penawaran adalah

$P_s = 2Q + 10$. Terhadap barang tsb dikenakan pajak proporsional sebesar 10% dari harga jual.

Berapa harga keseimbangan (P) dan jumlah keseimbangan (Q) :

a. sebelum dikenai pajak ?

b. sesudah dikenai pajak ?

a. Sebelum dikenai pajak

$P_d = P_s$

$- Q + 25 = 2Q + 10$

$-3Q = -15$

$- Q = -5$

$Q = 5$

$P = 2Q + 10 = 2.5 + 10 = 20$

Jadi keseimbangan pasar terjadi pada P = 20 dan Q = 5

b. Setelah kena pajak

Dikenakan pajak proporsional sebesar 10%, sehingga persamaan fungsi penawaran menjadi :

$$P_s = (1+0.1)\ (2Q+10) = 1.1\ (2Q+10) = 2.2Q + 11$$

Keseimbangan pasar terjadi jika $P_d = P_s$

$- Q + 25 = 2.2Q + 11$

$- 3.2\ Q = -14$

$Q = 4.38$

$P = 2.2\ 4.38 + 11 = 20.64$

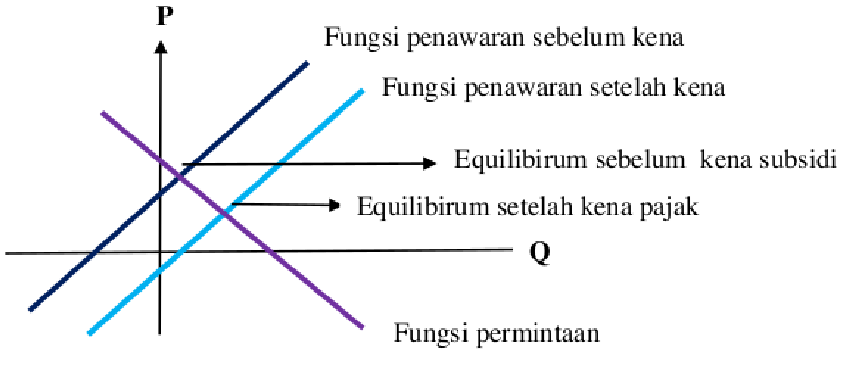
Jadi keseimbangan pasar setelah kena pajak terjadi pada P = 20.64 dan Q = 4.38

8.4.2. Subsidi

Subsidi terhadap penjualan suatu barang menyebabkan harga jual barang tersebut turun.

Setelah dikenakan subsidi, produsen akan mengalihkan (sebagian) subsidi tersebut ke konsumen, yaitu dengan jalan menawarkan harga jual yang lebih trendah. Oleh karenanya, subsidi dikenakan pada fungsi penawaran.

Secara grafik, pengaruh subsidi dapat dilihat pada gambar ....



Gambar 8. 5. Pengaruh Subsidi

Jenis subsidi :

a. Subsidi Spesifik

Subsidi spesifik adalah subsidi yang dikenakan pada setiap unit barang. Jika pemerintah mengenakan subsidi s per unit pada produk tertentu, akan mengakibatkan harga produk tersebut turun dan jumlah barang yang diminta/ditawarkan atas barang tersebut akan naik

Karena subsidi hanya dibebankan pada fungsi penawaran, maka rumus untuk fungsi penawaran menjadi :

$P_s = a + bQ_s - s$ (s=subsidi)

Contoh 1 :

Jika diketahui fungsi permintaan suatu barang : $P = 15 - Q$ dan fungsi penawaran :

$P =3 + 0,5$ Q, serta dikenakan subsidi spesifik sebesar Rp 1.5,- per unit.

Berapa harga keseimbangan (P) dan jumlah keseimbangan (Q) :

a. sebelum dikenai subsidi?

b. sesudah dikenai subsidi ?

Jawab :

a. Keseimbangan pasar sebelum subsidi :

$P_s = P_d$

$15 - Q = 3 + 0{,}5\ Q$

$12 = 1.5\ Q$, sehingga $Q = 8$

$P = 15 - 8 = 7$

Jadi keseimbangan pasar terjadi pada $P = 7$ dan $Q = 8$

b. Keseimbangan sesudah kena subsidi

Fungsi penawaran menjadi : $P =3 + 0{,}5\ Q - 1.5 = 1.5 + 0.5\ Q$

Keseimbangan pasar setelah subsidi :

$P_d = P_s$

$15 - Q = 1.5 + 0{,}5\ Q$

$13.5 = 1.5\ Q$, sehingga $Q = 9$

$P = 15 - 9 = 6$

Jadi keseimbangan pasar terjadi pada $P = 6$ dan $Q = 9$

Seperti pada penjelasan sebelumnya, subsidi akan menurukan harga jual, seperti terlihat pada contoh soal di atas.

b. Subsidi Proporsional

Subsidi proporsional adalah subsidi yang ditetapkan berdasarkan presentase tertentu dari harga jual.

Karena subsidi hanya dibebankan pada fungsi penawaran, maka rumus untuk fungsi penawaran menjadi :

$P_s = (1 - s)(a + bQ_s)$, di mana s = subsidi dalam prosentase

Contoh 1 :

Jika diketahui fungsi permintaan suatu barang : P = 15 – Q dan fungsi penawaran :

P =3 + 0,5 Q, serta dikenakan subsidi proporsional sebesar 10%.

Berapa harga keseimbangan (P) dan jumlah keseimbangan (Q) :

a. sebelum dikenai subsidi?

b. sesudah dikenai subsidi ?

Jawab :

a. Keseimbangan pasar sebelum subsidi :

$P_s = P_d$

$15 - Q = 3 + 0{,}5\ Q$

$12 = 1.5\ Q$, sehingga $Q = 8$

$P = 15 - 8 = 7$

Jadi keseimbangan pasar terjadi pada P = 7 dan Q = 8

b. Keseimbangan sesudah kena subsidi

Fungsi penawaran menjadi : $P =(1 - 0.1)(3 + 0{,}5\ Q)= 0.9\ (3+0.5Q) = 2.7 + 0.45Q$

Keseimbangan pasar setelah subsidi :

$P_d = P_s$

$15 - Q = 2.7 + 0{,}45\ Q$

$12.3 = 1.45\ Q$, sehingga $Q = 8.48$

$P = 15 - 8.48 = 6.52$

Jadi keseimbangan pasar terjadi pada P = 6.52 dan Q = 8.48

Seperti pada penjelasan sebelumnya, subsidi akan menurukan harga jual, seperti terlihat pada contoh soal di atas.

8.5. Rangkuman

1. Permintaan adalah banyaknya jumlah barang yang diminta pada suatu pasar tertentu dengan tingkat harga tertentu pula. Jumlah barang yang diminta dilambangkan dengan Q (berasal dari kata Quantitas = kuantitas), sedang harga barang dinyatakan dengan P (berasal dari kata Prize = harga). Persamaan umum fungsi permintaan :

$$\boxed{P_d = a + bQ_d}$$

2. Penawaran adalah banyaknya barang yang ditawarkan oleh penjual pada suatu pasar tertentu, pada periode tertentu, dan pada tingkat harga tertentu. Jumlah barang yang diminta dilambangkan dengan Q (berasal dari kata Quantitas = kuantitas), sedang harga barang dinyatakan dengan P (berasal dari kata Prize = harga). Persamaan umum fungsi penawaran:

$$\boxed{P_s = a + bQ_s}$$

3. Suatu barang dikatakan berada dalam keseimbangan (*equilibrium*) apabila jumlah barang yang diminta di pasar sama dengan jumlah barang yang ditawarkan. Keseimbangan pasar ini akan menciptakan harga dan jumlah keseimbangan di pasar. Syarat untuk mencapai keseimbangan pasar ini adalah jumlah produk yang diminta oleh konsumen harus sama dengan jumlah produk yang ditawarkan oleh produsen ($Q_d = Q_s$), atau harga produk yang diminta oleh konsumen harus sama dengan harga produk yang ditawarkan oleh produsen (P_d=P_s).
4. Pajak dapat menyebabkan harga menjadi naik, sedang subsidi mengurangi harga. Setelah dikenai pajak/subsidi, maka keseimbangan pasar tentunya berubah. Baik pajak maupun subsidi dikenakan pada fungsi penawaran, dan bukan pada fungsi permintaan.
5. Terdapat dua jenis pajak atau subsidi, yaitu :

1. Pajak/subsidi spesifik, yaitu pajak/subsidi yang dikenakan pada setiap unit barang.
2. Pajak/subsidi proporsional, yaitu pajak/subsidi yang ditetapkan berdasar presentase tertentu dari harga jual.

6. Subsidi terhadap penjualan suatu barang menyebabkan harga jual barang tersebut turun. Setelah dikenakan subsidi, produsen akan mengalihkan (sebagian) subsidi tersebut ke konsumen, yaitu dengan jalan menawarkan harga jual yang lebih trendah. Oleh karenanya, subsidi dikenakan pada fungsi penawaran.
7. Jenis-jenis subsidi :
   1. **Subsidi Spesifik :** subsidi yang dikenakan pada setiap unit barang
      Karena subsidi hanya dibebankan pada fungsi penawaran, maka rumus untuk fungsi penawaran menjadi :
      $P_s = a + bQ_s - s$ (s=subsidi)
   2. **Subsidi Proporsional :** subsidi yang ditetapkan berdasarkan presentase tertentu dari harga jual.
      Karena subsidi hanya dibebankan pada fungsi penawaran, maka rumus untuk fungsi penawaran menjadi :
      $P_s = (1 - s)(a + bQ_s)$, di mana s = subsidi dalam prosentase

Agar memudahkan untuk mempelajari, maka akan dicantumkan rangkuman pajak dan subsidi, seperti tampak pada tabel 8.1.

Beberapa ketentuan :

- Pajak ➔ membuat harga jual naik
- Subsidi ➔ membuat harga jual turun
- Hanya berpengaruh pada **fungsi penawaran** , **tidak** pada berpengaruh **Fungsi permintaan**

Tabel 8.1. Rangkuman Pajak dan Subsidi

	Awal	**Pajak spesifik** sebesar **t** tiap unit	**Pajak proporsional** sebesar **t %** dari harga jual	**Subsidi spesifik** sebesar **s** tiap unit	**Subsidi proporsional** sebesar **s %** dari harga jual
F permintaan	P_d=aQ+b	P_d= aQ + b **(tetap)**	P_d= aQ + b **(tetap)**	P_d= aQ + b **(tetap)**	P_d= aQ + b **(tetap)**
F Penawaran	P_s=aQ+b	P_s'=(aQ+b) + t	P_s'=(aQ+b) (1+t)	P_s'=(aQ+b) **- s**	P_s'=(aQ+b)

	Awal	**Pajak spesifik** sebesar **t** tiap unit	**Pajak proporsional** sebesar **t %** dari harga jual	**Subsidi spesifik** sebesar **s** tiap unit	**Subsidi proporsional** sebesar **s %** dari harga jual
					(1-s)
Keseimbangan Pasar (KP)	**$P_d = P_s$**	**$P_d = P_s$'**	**$P_d = P_s$'**	**$P_d = P_s$'**	**$P_d = P_s$'**

8.6. Latihan Soal

1. Jika diketahui Fungsi permintaan dan penawaran barang sebagai berikut :
   1 $P_d = -5Q + 10$ dan $P_s = Q + 5$
   2 $P_d = -0.5Q + 12$ dan $P_s = 0.5Q + 5$
   3 $P_d = -Q + 25$ dan $P_s = 2Q + 10$

   Tentukan :
   a. Keseimbangan Pasar (KP) mula-mula
   b. KP setelah dikenai pajak spesifik t = 10 tiap unit.
   c. KP setelah dikenai pajak proporsional t = 10% dari harga jual.
   d. KP setelah diberi subsidi spesifik s = 5 tiap unit.
   e. KP setelah diberi subsidi proporsional s= 5% dari harga jual.
2. Pada saat harga buku Rp 10000 per lusin permintaan akan buku tersebut sebanyak 10 lusin, dan ketika harga buku turun menjadi Rp 8000 per lusin permintaannya menjadi 16 lusin. Carilah fungsi permintaanya!
3. Dalam suatu pasar diketahui fungsi permintaannya Qd = 40 - 2P. Berapakah jumlah permintaan ketika harga (P) = 10?
4. Pada saat harga Rp 40 per unit, jumlah penawarannya 10 unit. Dan ketika harga Rp 60 per unit, jumlah penawarannya 20 unit. Tentukan fungsi penawarannya!
5. Tentukan jumlah barang dan harga pada keseimbangan pasar untuk fungsi permintaan Qd = 10 - 0,6Pd dan fungsi penawaran Qs = -20 + 0,4Ps.
6. Fungsi penawaran pasar tepung terigu adalah 2P = 20 + Q, sedang fungsi permintaan pasar tepung terigu adalah P = 30 – 1,5Q. P adalah harga per

kilogram tepung terigu dalam rupiah. Q adalah jumlah tepung terigu yang diminta dan ditawarkan per satuan waktu dalam kilogram. Berapa harga per kilogram dan jumlah yang terjual pada saat pasar dalam keadaan keseimbangan?

7. Saat harga Rp100,- jumlah yang diminta 40 unit. Saat harga naik menjadi Rp200,- jumlah yang diminta 30 unit. Maka, hitunglah fungsi permintaannya !
8. Diketahui fungsi permintaan $Qd = 40 - P$ dan fungsi penawaran $2P = \frac{1}{2} Q + 25$. Maka hitunglah harga keseimbangan yang diperoleh dari kedua fungsi tersebut !
9. Tabel permintaan dan penawaran daging di pasar Raya sebagai berikut:

Harga (Rp)	Jumlah Permintaan (kg)	Jumlah penawaran (kg)
30000	50	60
40000	30	65

Bedasarkan tabel tersebut, buatlah fungsi penawaran daging tersebut !

10. Fungsi permintaan ditunjukkan dengan $P = 50 - 2Q$, dan fungsi penawaran ditunjukkan dengan $P = -30 + 2Q$. Terhadap barang tersebut dikenakan pajak sebesar Rp 10,00 per unit. Tentukan Titik keseimbangan pasar setelah pajak.
11. Diketahui fungsi $Pd = -11Q + 30$, $Ps = Qs + 1$ dengan pajak $(t) = 3$ Berapa pajak yang diterima pemerintah?
12. Fungsi permintaan dan penawaran ditunjukkan oleh :

    $P_d = -2Q + 10$

    $P_s = 0{,}5\ Q + 5$

    a. Carilah keseimbangan awal.
    b. Apabila dikenakan pajak sebesar Rp 1 per unit bagaimana posisi keseimbangan setelah pajak?
    c. Berapa beban pajak yang ditanggung oleh konsumen?
    d. Berapa beban pajak yang harus ditanggung oleh produsen?
    e. Berapa pendapatan pajak yang diterima oleh pemerintah?
13. Dengan persamaan pada nomer 12 yaitu :

    $P_d = -2Q + 10$

    $P_s = 0{,}5\ Q + 5b$

Dan seandainya pemerintah memberikan subsidi sebesar Rp. 1 per unit maka hitunglah :

a. Harga dan kuantitas setelah subsidi
b. Besarnya subsidi yang dinikmati oleh konsumen
c. Besarnya subsidi yang dinikmati oleh produsen
d. Besarnya subsidi yang dikeluarkan oleh pemerintah

14. Diketahui fungsi permintaan Pd = 20 - Qd dan fungsi penawaran Ps = Qs - 9 dan pemerintah memberikan pajak sebesar 2 per unit, tentukanlah:
a. Keseimbangan pasar sebelum pajak
b. Keseimbangan pasar setelah pajak
c. Pajak yang ditanggung konsumen, produsen dan diterima pemerintah

15. Diketahui:

P	Qd	Qs
20	200	250
15	250	200

Ditanyakan :
a. Tentukan fungsi permintaan dan penawarannya
b. Berapa kuantitas yang diminta (Qd) pada saat harganya (P) = 40?
c. Berapa kuantitas yang ditawarkan (Qs) pada saat harganya (P) = 10 ?
d. Tentukan harga dan kuantitas keseimbangannya, kemudian Gambarkan kurvanya !
e. Tunjukkan dengan disertai contoh perbedaan dari pergerakan sepanjang kuva permintaan dengan pergeseran kurva permintaan !
f. Tunjukkan dengan disertai contoh perbedaan dari pergerakan sepanjang kurva penawaran dengan pergeseran kurvapenawaran !

16. Bila persamaan fungsi permintaan dan fungsi penawaran masing-masing adalah Qd = 140 – 20P dan Qs = -40 + 20P dan kedua fungsi tersebut merupakan fungsi permintaan dan penawaran terhadap X, maka:
a. Carilah tingkat harga dan kuantitas keseimbangan dan gambarkan grafiknya !

b. Apabila diketahui harga sebesar Rp. 6,- apakah terjadi excess supply ataukah excess demand ?

c. Berapakah besarnya excess tersebut ? Apa dampak dari terjadinya excess tersebut terhadap harga ?

d. Dari gambar no 6a tersebut, bagaimana pengaruhnya terhadap keseimbangan pasar, jika terjhadi kenikan harga input ?

17. Seorang pedagang daging menaikkan harga dari Rp. 3000/kg menjadi Rp.4000/kg. Akibat kenaikan harga tersebut penjualan daging mengalami penurunan dari 20 kg menjadi 10 kg. Bagaimanakah sifat permintaan terhadadap daging tersebut? (Buktikan dengan dua cara: a. Dengan menghitung koefisien elastisitasnya, dan b. Dengan menggunakan hubungan antara sifat elastisitas dengan TR); Kemudian berikan interpretasi untuk koefisien elastisitas yang anda peroleh !

18. Diketahui : fungsi penawaran ; Sx = - 4000 + 2000 Px dan fungsi permintaan; Dx = 8000 – 1000 Px. Cobalah anda cari kuantitas dan harga keseimbangannya!

19. Fungsi Permintaan suatu barang yang ditunjukan oleh persamaan P= 45-4Q dan fungsi Penawarannya ditunjukan oleh persamaan P=5+Q . Barang tersebut diberikan subsidi sebesar Rp 4 per unit.

a. Berapa harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan yang tercipta di pasar sebelum dan sesudah subsidi ?

b. Berapakah subsidi yang dinikmati konsumen, produsen dan yang diberikan oleh pemerintah ?

20. Fungsi Permintaan suatu barang yang ditunjukan oleh persamaan P= 50-2Q dan fungsi Penawarannya ditunjukan oleh persamaan P= (-30) +2Q . Barang tersebut diberikan subsidi sebesar Rp 10 per unit.

a. Berapa harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan yang tercipta di pasar sebelum dan sesudah subsidi ?

b. Berapakah subsidi yang dinikmati konsumen, produsen dan yang diberikan oleh pemerintah ?

21. Diketahui suatu produk ditunjukkan fungsi permintaan P = 7 + Q dan fungsi penawaran P = 16 – 2Q. Produk tersebut dikenakan pajak sebesar Rp. 3,-/unit

a. Berapa harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum dan sesudah pajak ?

b. Berapa besar penerimaan pajak oleh pemerintah ?

c. Berapa besar pajak yang ditanggung kosumen dan produsen ?

22. Permintaan akan suatu komoditas dicerminkan oleh $Q_d = 12–2P$ sedangkan penawarannya $Q_s = -4 + 2P$ pemerintah memberikan subsidi sebesar Rp. 2,- setiap unit barang.

a. Berapakah jumlah dan harga keseimbangan sebelum subsidi ?

b. Berapakah jumlah dan harga keseimbangan sesudah subsidi ?

c. Berapa bagian dari subsidi untuk konsumen dan produsen ?

d. Berapa subsidi yang diberikan pemerintah ?

23. Misalnya sebelum pemerintah memberikan subsidi, permintaan dan penawaran suatu produk adalah sebagai berikut:

$P_D = 90 – 3Q$ (rupiah per unit)

$P_S = 5Q + 50$ (rupiah per unit)

Kemudian pemerintah memberikan subsidi sebesar Rp 24/unit.

Tentukan:

a. Harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum dan sesudah subsidi diberikan.

b. Total pemberian subsidi oleh pemerintah.

c. Besar subsidi yang dinikmati konsumen dan produsen.

===

Setiap pagi adalah ANUGERAH

bagi mereka yang punya mimpi besar untuk mewujudkannya menjadi kenyataan

===

DAFTAR PUSTAKA

Afidah, & Khairunnisa. (2014). *Matematika Dasar*. Jakarta: Rajawali Press.

Cleaves, C. (2012). *Business Math*. New Jeirsey: Prentice Hall.

Cleaves, C., Margie, H., & Jeffrey, N. (2012). *Business Math*. New Jersey: Pearson Education.

Haeussler, E. F., & Paul, R. F. (2013). *Pengantar Matematika Ekonomi untuk Analisis Bisnis dan Ilmu-Ilmu Sosial Edisi Ketigabelas Jilid 2*. Jakarta: Erlangga.

Haeussler, E. F., & Paul, R. S. (2011). *Pengantaar Matematika Ekonomi untuk Analisis Bisnis dan Ilmu-Ilmu Sosial edisi Ketiga Belas Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Kalangi, J. B. (2012). *Matematika Ekonomi dan Bisnis Buku 2 Edisi 2*. Jakarta: Salemba Empat.

Nugroho, Y., & Saragih, F. D. (2014). *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Rajawali Press.

Polya. (2014). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. New Jersey: Princenton Science Library.

Sumardyono. (2017, May 28). Retrieved June 11, 2017, from http://p4tkmatematika.org/: http://p4tkmatematika.org/file/ARTIKEL/Artikel%20Matematika/SEJARAH%20BEBERAPA%20TOPIK%20ARITMETIKA_SUMARDYONO%20VALyl.pdf

Supu, S. (2014). *Sejarah Matematika Babylonia*. sciencemathematicseducation.wordpress.com.

Weibull, N. (2017, April 4). Retrieved June 11, 2017, from http://www.math.chalmers.se/: http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/MAN250/S04/Number_Systems.pdf

INDEKS

GLOSARIUM

A

Anuitas, rangkaian pembayaran tetap yang dilakukan secara berkala pada jangka waktu tertentu.

B

Bilangan asli, himpunan bilangan yang pertama ditemukan oleh manusia. Bilangan asli dimulai dengan angka 1. Jadi himpunan bilangan asli beranggotakan bilangan yang dimulai dari bilangan 1 yaitu 1,2,3,…

Bilangan bulat, gabungan dari bilangan bulat positif dan bilangan bulat negatif. Bilangan bulat merupakan bilangan yang paling umum digunakan, terutama pada dunia bisnis. Notasi himpunan bilangan bulat negatif dilambangkan dengan B^-={ …., -3,-2,-1, 0, 1,2,3, ….}.

Bilangan bulat negatif, himpunan bilangan yang telah mengenal bilangan yang lebih kecil dari bilangan 0. Notasi himpunan bilangan bulat negatif dilambangkan dengan B-={ …., -3,-2,-1, 0}.

Bilangan cacah = Bilangan bulat positif, merupakan himpunan bilangan yang hampir sama dengan bilangan Asli, namun ditambahkan dengan angka 0. Notasi himpunan bilangan bulat positif dilambangkan dengan B^+= {0,1,2,3, … }.

Bilangan irasional, merupakan himpunan bilangan yang tidak dapat dinyatakan dengan bilangan rasional. Contoh : $\sqrt[3]{7}, \sqrt{10}, \pi$. Bilangan irasional sangat jarang digunakan dalam bisnis, sehingga tidak akan dibahas pada buku ini, dan hanya sebagai tambahan pengetahuan saja.

Bilangan kompleks, merupakan wadah bagi bilangan imaginer. Bilangan imaginer ini digunakan untuk menjawab pertanyaan : “ Bilangan yang mana yang kuadratnya sama dengan -1? atau x^2 = -1”. Bilangan kompleks ditulis dengan a + i b, di mana a dan b adalah anggota bilangan real, serta i^2 = -1. Contoh bilangan kompleks adalah 2 + 4i, 3+2i, -3+i dan lain-lain.

Bilangan rasional, perluasan himpunan bilangan bulat, karena pada himpunan bilangan bulat, terdapat pula bilangan pecahan. Bilangan rasional dapat didefiniskan dengan : R = { x | x = $\frac{a}{b}$, a dan b $anggota$ $bilangan$ $bulat$, dan $b \neq 0$}.

Bilangan real, merupakan gabungan dari bilangan rasional dan bilangan irasional. Dengan terciptanya sistem bilangan real, maka pada garis bilangan tidak terdapat lagi tempat yang kosong. Maksudnya ialah bahwa antara bilangann real dengan titik pada garis bilangan ada hubungan satu-satu.

Bunga majemuk, bunga yang diperoleh untuk periode tersebut ditambahkan ke utang pokok (jumlah yang diinvestasikan) sehingga jumlah ini pun memperoleh bunga selama periode bunga berikutnya. Atau selisih antara nilai majemuk dan nilai pokok awal $S - P$.

Bunga majemuk kontinu, Selisih antara nilai majemuk kontinyu dan nilai pokok awal $S - P$.

D

Desimal, sistem bilangan yang menggunakan 10 macam angka dari 0,1, sampai 9.

Determinan, suatu fungsi, fungsi determinan merupakan suatu fungsi bernilai real dari suatu matriks bujur sangkar.

F

Fungsi eksponen, Fungsi f yang didefinisikan sebagai $f(x) = b^x$ di mana $b > 0$ dan $b \neq 1$, dan eksponen x adalah bilangan real.

Fungsi logaritma, $y = {}^b\log x$ jika dan hanya jika $b^y = x$.

I

Invers matriks, hasil dari matriks yang dibalik dengan syarat jika **matriks** tersebut adalah **matriks** persegi (**matriks** yang berukuran n x n) dan **matriks** tersebut non-singular (determinan 0).

K

Keseimbangan pasar, keadaan dimana jumlah barang yang diminta di pasar sama dengan jumlah barang yang ditawarkan.

M

Matriks, kumpulan angka-angka (elemen-elemen) yang disusun menurut baris dan kolom, dan berbentuk empat persegi panjang. Elemen-elemennya ditunjukkan pada baris dan kolomnya.

Matriks baris, matriks dengan banyaknya baris 1.

Matriks bujur sangkar, matriks dengan banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom.

Matriks diagonal, matriks bujur sangkar, dimana elemen pada diagonal utamanya $\neq 0$ dan elemen selain diagonal utamanya = 0.

Matriks identitas, matriks bujur sangkar, dimana elemen pada diagonal utamanya = 1, sedangkan elemen elemen lain = 0. Matriks Identitas, selalu diberi nama dengan I.

Matriks kolom, matriks dengan banyaknya kolom 1.

Matriks nol, matriks dimana semua elemennya nol.

Matriks segitiga atas, matriks bujur sangkar, dimana elemen $f_{ij} = 0$, untuk $i > j$.

Matriks segitiga bawah, matriks bujur sangkar, dimana elemen $g_{ij} = 0$, untuk $i < j$.

Matriks skalar, matriks bujur sangkar, dimana elemen pada diagonal utamanya $\neq 0$ dan semua elemen pada diagonal utama itu sama, sedangkan elemen elemen lain = 0.

Matriks transpose, matriks yang didapat dari matriks lain dengan cara menukar baris ke i menjadi kolom ke i, dan sebaliknya menukar baris ke j menjadi kolom ke j.

Metode eliminasi, metoda yang mendasarkan diri pada penggantian satu variabel pada variabel yang lain.

Metode substitusi, metoda yang mendasarkan diri untuk menentukan nilai dari salah satu variabel dengan cara menghilangkan variabel lainnya.

N

Nilai majemuk, jumlah terakumulasi (nilai pokok ditambah dengan bunga majemuk).

Nilai majemuk kontinu, nilai majemuk dalam tingkat bunga kontinu.

Nilai masa depan dari anuitas, penjumlahan dari nilai masa depan seluruh n pembayaran.

Nilai sekarang, nilai pokok P yang harus diinvestasikan pada tingkat bunga periodik r untuk periode bunga n.

Nilai sekarang dari anuitas, jumlah dari nilai sekarang dari seluruh n pembayaran.

P

Pecahan, bilangan yang digunakan untuk menyatakan bagian dari bilangan bulat.

Pecahan murni, pecahan yang bernilai kurang dari 1.

Pecahan campuran, pecahan yang bernilai lebih dari 1.

Penawaran, banyaknya barang yang ditawarkan oleh penjual pada suatu pasar tertentu, pada periode tertentu, dan pada tingkat harga tertentu.

Permintaan, banyaknya jumlah barang yang diminta pada suatu pasar tertentu dengan tingkat harga tertentu pula.

Pertidaksamaan, suatu pernyataan bahwa salah satu jumlah lebih kecil dari atau lebih besar dari, atau lebih kecil atau sama dengan, atau lebih besar atau sama dengan jumlah lain.

Pertidaksamaan kuadrat, suatu pernyataan bahwa salah satu jumlah lebih kecil dari atau lebih besar dari, atau lebih kecil atau sama dengan, atau lebih besar atau sama dengan jumlah lain dengan pangkat tertinggi dari variabelnya adalah 2.

Pertidaksamaan linier, suatu pernyataan bahwa salah satu jumlah lebih kecil dari atau lebih besar dari, atau lebih kecil atau sama dengan, atau lebih besar atau sama dengan jumlah lain dengan pangkat tertinggi dari variabelnya adalah 1.

Persamaan, pernyataan bahwa dua ekspresi adalah sama nilainya. Kedua ekspresi yang membentuk persamaan disebut sisi-sisinya. Keduanya dipisahkan oleh tanda persamaan, yaitu “=”.

Persamaan linier, persamaan yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah 1.

Persamaan kuadrat, persamaan yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah 2.

Persen, simbol yang digunakan untuk menunjukkan persentase, angka atau rasio sebagai pecahan dari 100.

S

Sistem persamaan linier, sebuah himpunan terhingga persamaan dalam peubah peubah x_1, x_2, x , …. x_n.

T

Tingkat bunga efektif, ekuivalen dengan tingkat bunga nominal r yang dimajemukkan n kali dalam setahun.

Hak Cipta Buku Ajar

ORIGINALITY REPORT

0%	0%	0%	0%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

Exclude quotes	Off	Exclude matches	< 3%
Exclude bibliography	Off		